Controle de Mosquitos via Técnica de Irradiação

Hyun Mo Yang, **Roberto C. A. Thomé**[*],
Departamento de Matemática Aplicada - IMECC - Unicamp,
Caixa Postal 6065, CEP 13083-970, Campinas, SP.
E-mail: hyunyang@ime.unicamp.br, rcthome@ime.unicamp.br

O ciclo de mosquitos é dividido em dois estágios: fase aquática (ovos, larvas e pupas) e fase alada (mosquitos adultos). Apresentamos um modelo de controle ótimo de mosquitos que consiste na introdução de mosquitos machos estéreis obtidos pela técnica de irradiação. Nosso modelo é baseado em equações diferenciais ordinárias que descrevem a dinâmica dos mosquitos na fase aquática, dos mosquitos fêmeas imaturas (antes de acasalar), dos mosquitos fêmeas fertilizadas (depois de acasalar), dos mosquitos fêmeas não-fertilizadas (depois de acasalar), dos mosquitos machos (macho natural) e dos mosquitos machos estéreis (irradiados). A dinâmica do problema apresentada em [1] é dada por:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} &= \phi(1-\frac{A}{C})F-(\gamma+\mu_A)A \\ \frac{dI}{dt} &= r\gamma A-\frac{\beta MI}{M+M_T}-\frac{\beta_T M_T I}{M+M_T}-\mu_I I \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{\beta MI}{M+M_T}-\mu_F F \\ \frac{dU}{dt} &= \frac{\beta M_T I}{M+M_T}-\mu_U U \\ \frac{dM}{dt} &= (1-r)\gamma A-\mu_M M \\ \frac{dM_T}{dt} &= \alpha-\mu_T M_T, \end{cases}$$

onde

$A \rightarrow$ População de Mosquitos na Fase Aquática;

$I \rightarrow$ População de Mosquitos Fêmeas Imaturas (antes de acasalar);

$F \rightarrow$ População de Mosquitos Fêmeas Fertilizadas (depois de acasalar);

$U \rightarrow$ População de Mosquitos Fêmeas Não-Fertilizadas (depois de acasalar);

$M \rightarrow$ População de Mosquitos Machos (Macho Natural);

$M_T \rightarrow$ População de Mosquitos Machos Estéreis devido à técnica de Irradiação.

Observe que a variável de estado U (Mosquitos Fêmeas Não-Fertilizadas) do problema está desacoplada do sistema dinâmico. O problema acima é colocado no formato de um problema de controle ótimo no qual minimizamos o custo com inseticida, o custo com a produção de mosquitos irradiados e o custo social (número de mosquitos fêmeas fertilizadas). Matematicamente, o problema de controle ótimo é formulado como:

$$\min \mathrm{J}[\mathrm{u}_1, u_2] = \frac{1}{2}\int_0^T \left(c_1u_1^2+c_2u_2^2+c_3F^2\right)dt$$

sujeito ao sistema de estado

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} &= \phi(1-\frac{A}{C})F-(\gamma+\mu_A)A \\ \frac{dI}{dt} &= r\gamma A-\frac{\beta MI}{M+M_T}-\frac{\beta_T M_T I}{M+M_T}-(\mu_I+u_1)I \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{\beta MI}{M+M_T}-(\mu_F+u_1)F \\ \frac{dM}{dt} &= (1-r)\gamma A-(\mu_M+u_1)M \\ \frac{dM_T}{dt} &= u_2-(\mu_T+u_1)M_T, \end{cases}$$

onde as variáveis de controle u_1 e u_2 representam o investimento em inseticidas e o investimento com mosquitos irradiados (custo de produção), respectivamente.
De acordo com o Princípio do Máximo de Pontryagin [2], podemos determinar a formulação precisa do nosso controle ótimo $u_1^*(t)$ e $u_2^*(t)$. Para isso, definimos o Hamiltoneano por:

$$\begin{aligned} H \;=\; & \frac{1}{2}\left[c_1u_1^2+c_2u_2^2+c_3F^2\right]+ \\ & +\lambda_1\left[\phi(1-\frac{A}{C})F-(\gamma+\mu_A)A\right]+ \\ & +\lambda_2\left[r\gamma A-\frac{(\beta M+\beta_T M_T)I}{M+M_T}-(\mu_I+u_1)I\right]+ \\ & +\lambda_3\left[\frac{\beta MI}{M+M_T}-(\mu_F+u_1)F\right]+ \\ & +\lambda_4\left[(1-r)\gamma A-(\mu_M+u_1)M\right]+ \\ & +\lambda_5\left[u_2-(\mu_T+u_1)M_T\right], \end{aligned}$$

onde $\lambda_j(t), j=1,2,3,4,5$, são as variáveis adjuntas do problema de controle ótimo. O Princípio do

[*]Estudante de Doutorado, apoio CAPES

Máximo de Pontryagin estabelece que o controle ótimo irrestrito $u_1^*(t)$ e $u_2^*(t)$ satisfazem:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1^*} = \frac{\partial H}{\partial u_2^*} = 0.$$

Além disso, o sistema adjunto é dado por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \lambda_1}{\partial dt} &= -\frac{\partial H}{\partial A} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial dt} &= -\frac{\partial H}{\partial I} \\ \frac{\partial \lambda_3}{\partial dt} &= -\frac{\partial H}{\partial F} \\ \frac{\partial \lambda_4}{\partial dt} &= -\frac{\partial H}{\partial M} \\ \frac{\partial \lambda_5}{\partial dt} &= -\frac{\partial H}{\partial M_T}. \end{cases}$$

O componente final num sistema de otimalidade é o conjunto formado pelas condições de transversalidade. No nosso caso, isso resume-se em condições finais nas variáveis adjuntas. Elas são consequências de um resultado que pode ser encontrado em Fleming e Rishel [2]. Dado o problema de minimização

$$\min \ J[u] = F(x(T)) \ + \int_0^T f_o(x,u)dt$$

sujeito ao sistema de estado $dx/dt = f(t,x,u)$, onde $x(T)$ pertence a algum conjundo alvo $g(x(T))$, temos a seguinte condição de transversalidade nas variáveis adjuntas

$$\lambda_i(T) = \nabla F(x(T)) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i(x(T)).$$

A função $F(x)$ é conhecida como *custo terminal.*
No nosso problema, não existe custo terminal, logo $F(x(T)) = 0$. Além disso, nosso problema também não possui conjunto alvo para as variáveis de estado. Embora temos um resultado final desejado, o estado final é de fato livre. Segue daí, que o somatório da condição de transversalidade também é nulo.
Portanto, as condições de transversalidade para as variáveis adjuntas são dadas por

$$\lambda_i(T) = 0, \quad i = 1,2,3,4,5.$$

O sistema de otimalidade é uma parte importante do problema. Ele descreve matematicamente como o sistema se comporta com a aplicação do controle. Portanto, tomando o sistema de estado junto com o sistema adjunto, o controle ótimo $u_1^*(t)$ e $u_2^*(t)$ e as condições de transversalidade, o sistema de otimalidade é definido por:

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} &= \phi(1-\frac{A}{C})F - (\gamma+\mu_A)A; \\ \frac{dI}{dt} &= r\gamma A - \frac{\beta M I}{M+M_T} - \frac{\beta_T M_T I}{M+M_T} \\ & \quad -(\mu_I + u_1)I; \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{\beta M I}{M+M_T} - (\mu_F+u_1)F; \\ \frac{dM}{dt} &= (1-r)\gamma A - (\mu_M+u_1)M; \\ \frac{dM_T}{dt} &= u_2 - (\mu_T+u_1)M_T \\ \frac{\partial\lambda_1}{\partial dt} &= \left(\phi\frac{F}{C}+\gamma+\mu_A\right)\lambda_1 - r\gamma\lambda_2 \\ & \quad -(1-r)\gamma\lambda_4 \\ \frac{\partial\lambda_2}{\partial dt} &= \left(\frac{\beta M}{M+M_T} + \frac{\beta_T M_T}{M+M_T} + \mu_T + u_1\right)\lambda_2 \\ & \quad -\frac{\beta M}{M+M_T}\lambda_3 - (1-r)\gamma\lambda_4 \\ \frac{\partial\lambda_3}{\partial dt} &= -c_3F - \phi\left(1-\frac{A}{C}\right)\lambda_1 + (\mu_F+u_1)\lambda_3 \\ \frac{\partial\lambda_4}{\partial dt} &= [(\beta-\beta_T)\lambda_2 - \beta\lambda_3]\frac{M_T I}{(M+M_T)^2} \\ & \quad +(\mu_M+u_1)\lambda_4 \\ \frac{\partial\lambda_5}{\partial dt} &= -[(\beta-\beta_T)\lambda_2 - \beta\lambda_3]\frac{M I}{(M+M_T)^2} \\ & \quad +(\mu_T+u_1)\lambda_5 \\ u_1^*(t) &= \frac{\lambda_2 I + \lambda_3 F + \lambda_4 M + \lambda_5 M_T}{c_1} \\ u_2^*(t) &= -\frac{\lambda_5}{c_2} \\ \lambda_i(T) &= 0, \ \ i = 1,2,3,4,5. \end{cases}$$

O sistema de otimalidade acima é resolvido seguindo as estratégias apresentadas em [3].

Referências

[1] Esteva, L. & Yang, H.M.: Mathematical Model to Assess the Control os Aedes aegypti Mosquitoes by The Sterile Insect Technique, *Trabalho submetido para publicação*, (2005).

[2] Fleming, W. & Rishel, R.: *Deterministic and Stochastic Optimal Control.* Springer-Verlag, New York, 1975.

[3] Culshaw, R.V., Ruan, S. & Spiteri, R.J.: Optimal HIV treatment by maximising immune response, *J. Math. Biol.*, 48, 545-562 (2004).