ÁLGEBRA APLICADA A GENÉTICA

Flávia Costa Gomes de Mendonça, Lucimara Russo
Depto de Matemática, Estatística e Computação, FCT/UNESP, 19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: flaviacgm@ig.com.br, lu_prudente@yahoo.com.br

José Roberto Nogueira, Suetônio de Almeida Meira
Depto de Matemática, Estatística e Computação, FCT/UNESP, 19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: jrnog@prudente.unesp.br, smeira@prudente.unesp.br

INTRODUÇÃO

Utilizando a teoria de autovalores e autovetores da Álgebra Linear, este trabalho tem o objetivo de investigar a propagação de uma característica herdada em sucessivas gerações calculando potências de matrizes.

Apresentamos aqui a maneira pela qual os genes dos pais são passados para seus descendentes através da hereditariedade autossômica. Para isto, foi suposto que a característica a ser considerada é governada por um conjunto de dois genes, denotados por *A* e *a*. Através de modelos matriciais obtemos os prováveis genótipos dos descendentes a partir do genótipo dos pais, e utilizando esses modelos acompanhamos a distribuição genotípica de uma população através de sucessivas gerações.

Na hereditariedade autossômica cada indivíduo de cada sexo possui dois genes, onde os possíveis pares são *AA*, *Aa* e *aa*, este par de genes é denominado genótipo, e determina como o caráter controlado por este genes se manifesta no indivíduo, que ao herdar um dos genes de cada par de genes de seus pais, forma seu próprio e particular par. Pelo que sabemos, é uma questão de sorte qual dos genes os pais passam aos filhos, por exemplo, se um dos pais é do genótipo *Aa*, é igualmente provável que o descendente herde o gene *A* ou o gene *a* daquele genitor.

Na tabela abaixo segue as probabilidades dos possíveis genótipos dos descendentes para todas as combinações de genótipos dos pais.

Genótipo do Descendente	Genótipos dos Pais					
	AA - AA	AA - A*a*	AA - *aa*	A*a* - A*a*	A*a* - *aa*	*aa* - *aa*
AA	1	0,5	0	0,25	0	0
A*a*	0	0,5	1	0,5	0,5	0
aa	0	0	0	0,25	0,5	1

Tabela 1

Exemplo: Distribuição dos Genótipos numa População

Suponha que um agricultor tem uma grande população de plantas consistindo de alguma distribuição de todos os três possíveis genótipos *AA*, *Aa* e *aa*. O agricultor deseja implementar um programa de criação no qual cada planta da população é sempre fertilizada por uma planta do genótipo *aa*. Vamos então deduzir uma expressão para a distribuição dos três genótipos na população depois de um número qualquer de gerações.

Para $n = 0, 1, 2, ...$, vamos denotar

a_n = fração de plantas do genótipo *AA* na *n*-ésima geração
b_n = fração de plantas do genótipo *Aa* na *n*-ésima geração
c_n = fração de plantas do genótipo *aa* na *n*-ésima geração

Assim, a_0, b_0 e c_0 especificam a distribuição inicial dos genótipos. Temos também que

$$a_n + b_n + c_n = 1, \text{ para } n = 0, 1, 2, ...$$

Através da Tabela 1, podemos determinar a distribuição de genótipos em cada geração a partir da distribuição na geração precedente, pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= a_{n-1} + b_{n-1} \qquad n = 1, 2, ... \qquad (1) \\ c_n &= c_{n-1} + b_{n-1} \end{aligned}$$

A primeira dessas três equações afirma que nenhum dos descendentes de uma planta fertilizada por outra de genótipo *aa*, serão do genótipo *AA*.

A segunda afirma que todos os descendentes de uma planta do genótipo *AA* serão do genótipo *Aa* neste programa de criação e metade dos descendentes de uma planta do genótipo *Aa* será do genótipo *Aa*.

E a terceira garante que todos os descendentes de uma planta do genótipo *aa* serão do genótipo *aa*, e metade dos descendentes de uma planta do genótipo *Aa* será do tipo *aa*.

As Equações (1) podem ser escritas em notação matricial como

$$x^{(n)} = M\, x^{(n-1)}\ , \quad n = 1, 2, ... \qquad (2)$$

onde

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} \qquad x^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Note que as três colunas da matriz *M* são iguais a terceira, quinta e sexta colunas da Tabela 1.

A notação matricial pode ser reescrita as seguinte forma:

$$x^{(n)} = M\, x^{(n-1)} = M^2 x^{(n-2)} = ... = M^n x^{(0)} \qquad (3)$$

Consequentemente, se encontrarmos uma expressão explícita para M^n, poderemos então encontrar uma expressão explícita para $x^{(n)}$. Para isto, primeiramente diagonalizamos *M*, ou seja, procuramos uma matriz invertível *P* e uma matriz diagonal *D* tais que

$$M = P D P^{-1} \qquad (4)$$

Por meio desta diagonalização, podemos obter

$M^2 = (PDP^{-1})\,(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PDDP^{-1} = PD^2P^{-1}$

$M^3 = (PDP^{-1})M^2 = (PDP^{-1})PD^2P^{-1} = PDD^2P^{-1} = PD^3P^{-1}$

....

$M^n = (PDP^{-1})M^{n-1} = (PDP^{-1})\,PD^{n-1}P^{-1} = PDD^{n-1}P^{-1} = PD^nP^{-1}$

Assim

$$M^n = P D^n P^{-1} \qquad \text{para } n = 1, 2,.......$$

onde

$$D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n{}_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k^n \end{bmatrix}$$

Para obtermos a diagonalização de *M* é necessário encontrarmos os autovalores e seus correspondentes autovetores. Para este calculo, foi utilizado o recurso computacional Scientific WorkPlace.

Autovalores: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, $\lambda_3 = 0$

Autovetores associados: $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Assim, na Equação (4) temos

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e}$$

$$P = [\, v_1 / v_2 / v_3 \,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Segue-se que: $x^{(n)} = P D^n P^{-1} x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$

ou então: $x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \\ 1-2\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n a_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \\ a_0 + b_0 + c_0 - 2a_0\left(\frac{1}{2}\right)^n - b_0\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{bmatrix}$

Lembrando que $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= 2\left(\tfrac{1}{2}\right)^n a_0 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^n b_0 \\ c_n &= 1 - 2a_0\left(\tfrac{1}{2}\right)^n - b_0\left(\tfrac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

Estas são fórmulas explícitas para a fração dos três genótipos na *n*-ésima geração de plantas em termos das frações de genótipos iniciais. Como $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende a zero quando *n* tende ao infinito, segue que destas equações que

$$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &\to 0 \\ c_n &\to 1 \end{aligned}$$

quando n tende a infinito. Isto mostra que no limite todas as plantas da população serão do genótipo *aa*.

CONCLUSÃO

Dessa forma vimos que a Álgebra Linear pode ser vista como objetos matemáticos de vida própria, tornando suas teorias familiares ao serem ligadas a problemas do qual se tem conhecimento, e uma grande variedade de aplicações.

Referências:

[1] Anton, H., Rorres, C., "***Álgebra linear com aplicações***", Tradução Doering, C. I., 2001.

[2] Lay, David C., "***Álgebra linear e suas aplicações***", Tradução Camelier, R.; Iório, Valéria de M., 1999.

[3] Leon, Steven J., "***Álgebra Linear com Aplicações***" , Tradução Iório, Valéria de M., 1999.