

## APLICAÇÃO DO CONTROLE ÓTIMO NA SINCRONIZAÇÃO DE SISTEMAS CAÓTICOS

Janice Pinheiro Boeira - [jpbmat@pop.com.br](mailto:jpbmat@pop.com.br) - UNIJUI  
Marat Rafikov - [rafikov@admijui.unijui.tche.br](mailto:rafikov@admijui.unijui.tche.br) - UNIJUI

### INTRODUÇÃO:

Os estudos sobre caos determinístico, introduzidos por Lorenz em 1963, levaram à paradoxal idéia de "controle do caos" [1]. De modo geral, os estudos que tem sido feitos visando a aplicação da teoria do caos enfocam três pontos principais: estabilização e controle; síntese; sincronização e análise. A partir do trabalho de Pecora e Carroll (1990) a sincronização de sistemas caóticos tornou-se um assunto muito importante na área de sistemas não-lineares. No presente trabalho, o problema da sincronização é formulado como um problema do controle ótimo. A utilização do controle linear aplicado a sistemas não-lineares tem sido justificada em [3], [4] e [5]. Neste trabalho é abordado o problema que considera dois sistemas de Lotka-Volterra de duas presas e um predador com condições iniciais diferentes. O objetivo do trabalho é sincronizar os sistemas, levando um deles ao mesmo comportamento caótico do outro através do controle ótimo não-linear proposto em [2].

### FORMULAÇÃO DO PROBLEMA:

São considerados os seguintes modelos para dois sistemas de Lotka-Volterra de duas presas e um predador:

$$\dot{x}_i = x_i \left( r_i - \sum_{j=1}^3 c_{ij} x_j \right) \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

$$\dot{y}_i = y_i \left( r_i - \sum_{j=1}^3 c_{ij} y_j \right) + u_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

Os sistemas (1) e (2) possuem os mesmos coeficientes, mas tem condições iniciais diferentes. Neste caso, o sistema (1) chama-se *sistema mestre* e (2) chama-se *sistema escravo*. A diferença entre estados dos sistemas mestre e escravo pode ser descrita introduzindo a variável

$$e_i = y_i - x_i \quad (3)$$

Subtraindo (1) de (2) e utilizando a notação (3) pode ser encontrado o sistema em desvios expresso em termos de  $e_i$  e  $x_i$ :

$$\dot{e}_i = r_i e_i + \sum_{j=1}^3 c_{ij} (x_j x_j - y_j y_j) + u_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

O problema de sincronização pode ser formulado como o seguinte problema do controle ótimo: encontrar as funções de controle  $u_i$  que transferem o sistema (4) de qualquer condição inicial ao estado final

$$e(\infty) = 0 \quad (5)$$

minimizando o funcional

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \sum_i m_i e_i^2 + \frac{1}{m_j} \left[ F_i + r_i e_i + \sum_j c_{ij} (y_j y_j - x_j x_j) \right]^2 \right\} dt \quad i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

$j = 1, 2, 3$

onde as constantes  $m_i$  são positivas.

Um método de controle ótimo para o sistema (4) foi proposto em [2]. Conforme este trabalho

$$u_i = -(m_i - x_i) e_i - \sum_j c_{ij} (y_j y_j - x_j x_j), \quad i = 1, 2, 3 \quad (7)$$

$j = 1, 2, 3$

As simulações numéricas da sincronização ótima através do controle (7) foram realizadas para valores  $m_1 = m_2 = m_3 = 5$ .

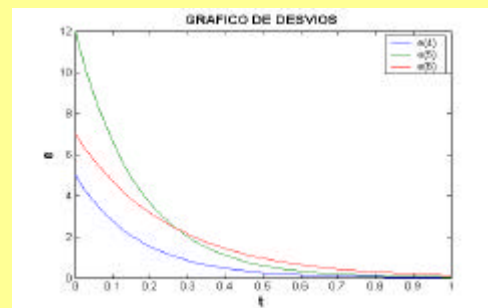


Figura 1: Gráfico de desvios

Os gráficos de desvios entre trajetórias do sistema mestre e sistema escravo estão na figura (1).

### CONSIDERAÇÕES FINAIS:

A utilização de uma função de controle adequada levou as variáveis do sistema em desvios ao valor desejado. A análise do gráfico permite perceber que o controle acontece rapidamente, o que indica uma sincronização eficiente entre os sistemas mestre e escravo.

### REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] B.R. Andrievskii, A.L. Fradkov, Control Chaos: Methods and Applications, I, Automation and Remote Control, 64(5) (2003) 673-713.
- [2] A. El-Gohary, M.T. Yassen, Optimal control and synchronization of Lotka-Volterra model, *Chaos, Solitons and Fractals*, 12 (2001) 2087-2093.
- [3] G.P. Jiang, G. Chen & W.K.S. Tang, A new criterion for chaos synchronization using linear state feedback control, *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 13 (2003) 2343-2351.
- [4] M. Rafikov, J.M. Balthazar, Síntese do controle ótimo linear feedback para sistemas que exibem caos. *Anais do 3º Congresso Temático de Dinâmica e Controle da SBMAC*. UNESP - Campus de Ilha Solteira. SBMAC, (2004), p.619-633.
- [5] M. Rafikov, J.M. Balthazar, Optimal linear and non-linear control design for chaotic systems. *ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. California, USA, September 24-28, 2005.
- [6] A.B. Schmid, Controle ótimo de sistemas populacionais que exibem caos. *Dissertação do Curso de Mestrado em Modelagem Matemática*. UNIJUI (2004).