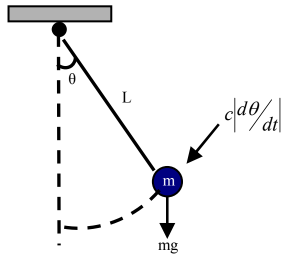
ESTABILIDADE DAS SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO DO PÊNDULO

Rodrigo Luiz Antoniazzi(1); Eleni Bisognin(2). (1) - Aluno do Curso de Matemática Aplicada Computacional - UNIFRA - Bolsista de Iniciação Cientifica – FAPERGS (rodrigoantoniazzi@yahoo.com.br); (2) – Profª. Orientadora – UNIFRA.

INTRODUÇÃO

O Pêndulo é um corpo de massa m, que consiste de uma partícula suspensa por um fio inextensível de comprimento L e que esta sob a ação do campo gravitacional. Quando é afastado da sua posição de equilíbrio e solto, o pendulo oscila, em um plano vertical, sob a ação da gravidade, descrevendo assim um movimento periódico e oscilatório.



A equação matemática que descreve o movimento do pêndulo é dada por

$$mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -cL\frac{d\theta}{dt} - mgLsen\theta \quad (1)$$

onde a força mg atua para baixo e $c\left|d\theta/dt\right|$ $c > 0$, é a força de amortecimento que se opõe à direção do movimento.

OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é analisar o modelo matemático (1) quanto a estabilidade do movimento de um pêndulo amortecido.

DESENVOLVIMENTO

A equação (1) pode ser escrita na forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\omega^2 sen\, x - \gamma\, y \end{cases} \quad (2)$$

onde $\gamma = \dfrac{c}{mL}$, $\omega^2 = \dfrac{g}{L}$ e fazendo $x = \theta$ e $y = \dfrac{d\theta}{dt}$.

Os pontos críticos do sistema (2) são: $(0,0)$, $(\pm\pi,0)$, $(\pm 2\pi,0)$, $(\pm 3\pi,0)$, ...

Perto da origem o sistema (2) é aproximado pelo sistema linear

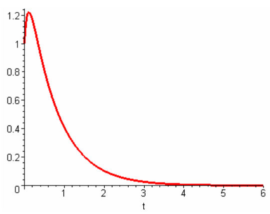
$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3)$$

Cujo os autovalores são:

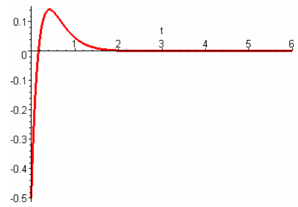
$$r_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4\omega^2}}{2}$$

- Se $\gamma^2 - 4\omega^2 > 0$, o ponto crítico (0,0) é um nó assintoticamente estável do sistema linear (3) e do sistema quase linear (2).

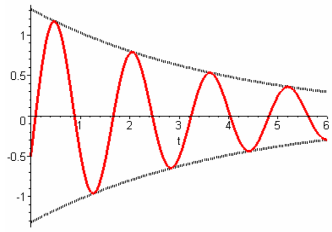
A solução do sistema (3) é mostrada no gráfico a seguir.



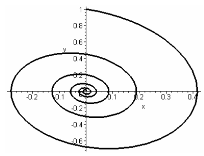
- Se $\gamma^2 - 4\omega^2 = 0$, o ponto crítico (0,0) pode ser um nó assintoticamente estável ou um ponto espiral do sistema quase linear (2).



- Se $\gamma^2 - 4\omega^2 < 0$, o ponto crítico (0,0) pode ser um nó assintoticamente estável ou um ponto espiral do sistema quase linear (2).



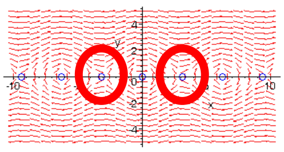
A figura (2), abaixo, mostra pontos espirais assintoticamente estáveis para o pêndulo amortecido



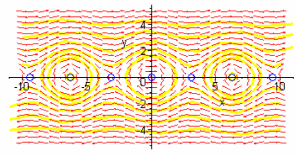
O comportamento do pêndulo perto dos pontos críticos $(\pm n\pi, 0)$ para n par é o mesmo que perto da origem (0,0).

Se n é ímpar os pontos $(\pm n\pi, 0)$ são pontos de sela. Eles correspondem à posição de equilíbrio mais alta do pêndulo, portanto são instáveis.

A figura (3), a seguir, mostra pontos instáveis para o pêndulo amortecido



O retrato de fase para o pêndulo amortecido na figura (4), abaixo, mostra o gráfico das trajetórias.



As partes horizontais onduladas das trajetórias representam movimentos em que o pêndulo descreve voltas completas. Esse tipo de movimento tende a diminuir devido ao termo de amortecimento que reduz a velocidade angular do pêndulo.

CONCLUSÕES

A análise dos autovalores da matriz correspondente ao sistema (3) nos permite obter informações a respeito da estabilidade do movimento do pêndulo e a configuração da solução do sistema correspondente a cada caso.

Referências Bibliográficas

[1] William E. Boyce; Richard C. DiPrima, "Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno", 7ª Edição, Rio de Janeiro:LTC, 2001.
[2] Kleber D. Machado, "Equações Diferenciais Aplicadas à Física", 2ª Edição, Ponta Grossa: UEPG, 2000.
[3] Djairo G. Figueiredo; Aloisio F. Neves, "Equações Diferenciais Aplicadas", Rio de Janeiro: IMPA, 1997.