Princípio da Exclusão Competitiva na População Biológica:Uma Aplicação de Equações Diferenciais

unesp

Claudiane Kelly de Lima

Orientador Prof. Dr.Suetônio de Almeida Meira, Co-orientador Prof. Dr. José Roberto Nogueira

Licenciatura em Matemática - FCT-UNESP – Câmpus de Presidente Prudente/SP

INTRODUÇÃO

Observamos na natureza que se duas espécies similares tenderem a ocupar o mesmo nicho, a luta pela existência entre elas será intensa e resultará na extinção da espécie mais fraca. Este fenômeno é conhecido como “Princípio da Exclusão Competitiva” e foi primeiramente enunciado por Darwin.

Apresentaremos uma prova matemática da Lei da Exclusão Competitiva. Esta se dá pela derivação de um sistema de equações diferenciais que governa a interação entre duas espécies similares e mostra que cada solução do sistema se aproxima do estado de equilíbrio em que uma das espécies é extinta.

DESENVOLVIMENTO

Construindo um modelo matemático, é preciso considerar as seguinte equação

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2$$

que governa o crescimento populacional N(t) de diferentes espécies das quais os membros competem entre si.

Como N(t) se aproxima do limite populacional $K = \frac{a}{b}$ com t próximo do infinito, podemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$\frac{dN}{dt} = aN\left(1 - \frac{b}{a}N\right) = aN\left(1 - \frac{N}{k}\right) = aN\left(\frac{k-N}{k}\right)$$

O termo aN é chamado de “Potencial Biótico” das espécies. Quando a população aumenta, o potencial biótico é reduzido pelo fator $\frac{(k-N)}{k}$ que é o número relativo de lugares vagos no ambiente.

Consideramos agora duas espécies 1 e 2 sendo $N_1(t)$ e $N_2(t)$ a população no tempo *t*, k_1 e k_2 a população máxima das espécies 1 e 2 que o ambiente pode suportar e a_1N_1 e a_2N_2 os potenciais bióticos das espécies 1 e 2.

Então, $N_1(t)$ e $N_2(t)$ satisfazem o sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dN_1}{dt} = a_1N_1\left(\frac{k_1 - N_1 - m_2}{k_1}\right)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = a_2N_2\left(\frac{k_2 - N_2 - m_1}{k_2}\right)$$

onde m_1 é o número total de lugares da primeira espécie que foram ocupados pelos membros da segunda espécie, e m_2 o número total de lugares da segunda espécie que foram ocupados pelos membros da primeira espécie.

Sabendo que, em geral, é improvável que duas espécies utilizem o mesmo meio de modo idêntico, devemos determinar $m_1 = \beta N_1$, $m_2 = \alpha N_2$ sendo α e β constantes que indicam o estado de influência de uma espécie sobre a outra. Se o interesse das espécies não é o mesmo e elas ocupam nichos diferentes, então $\alpha = \beta = 0$. Mas, se vivem no mesmo nicho e são muito parecidas, então as constantes α e β são muito próximos de 1.

Estudaremos o caso em que duas espécies quase idênticas vivem no mesmo nicho. Então $\alpha = \beta$ e, $N_1(t)$ e $N_2(t)$ satisfazem o sistema:

$$\frac{dN_1}{dt} = a_1N_1\left(\frac{k_1 - N_1 - N_2}{k_1}\right), \quad \frac{dN_2}{dt} = a_2N_2\left(\frac{k_2 - N_1 - N_2}{k_2}\right) \quad (1).$$

Observando agora a luta pela existência entre as espécies 1 e 2, vemos que o resultado é a extinção de uma das espécies. Este é, de fato, o caso que iremos mostrar agora.

TEOREMA(Princípio da Exclusão competitiva) . Suponha que k_1 é maior que k_2 . Então, cada solução $N_1(t)$ e $N_2(t)$ de (1) aproxima-se do equilíbrio da solução $N_1 = k_1, N_2 = 0$ onde t se aproxima do infinito. Em outras palavras, se as espécies 1 e 2 estão próximas e o ambiente pode suportar mais membros da espécies 1 do que da espécie 2, então a espécie 2 será extinta.

Para provar esse teorema, precisamos enunciar 3 Lemas:

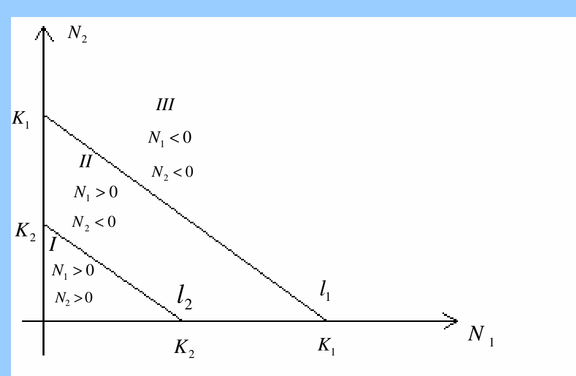
LEMA 1: Qualquer solução $N_1(t)$ e $N_2(t)$ de (1) que começa na região I em $t = t_0$ deve deixar essa região algum tempo depois.

LEMA 2:Qualquer solução $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (1) que começa a região II no tempo $t = t_0$ será restante nesta região por todo tempo $t \geq t_0$ e finalmente se aproxima da solução de equilíbrio $N_1 = k_1, N_2 = 0$

LEMA 3: Qualquer solução $N_1(t)$ e $N_2(t)$ de (1) que começa na região III no tempo $t = t_0$ resta para o futuro alguma aproximação para a solução de equilíbrio $N_1 = k_1, N_2 = 0$ tanto quanto t se aproxima do infinito.

PROVA DO TEOREMA: Os Lemas 1 e 2 afirmam que toda solução $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (1) que começa nas regiões I e II no tempo $t = t_0$ muito se aproxima da solução de equilíbrio $N_1 = k_1, N_2 = 0$ com t próximo do infinito. Similarmente, o lema 3 mostra que toda solução $N_1(t)$ e $N_2(t)$ de (1) que começa na região III no tempo $t = t_0$ também se aproxima da solução de equilíbrio $N_1 = k_1, N_2 = 0$. Logo, observe que qualquer $N_1(t)$ e $N_2(t)$ (1) que começa em l_1 ou l_2 devem imediatamente depois entrar na região III. Finalmente, se a solução $N_1(t)$, $N_2(t)$ de (1) abandona a região III, então ela deve cruzar a linha l_1 e imediatamente depois entrar na região II. O Lema 2 então força esta solução para próximo da solução de equilíbrio $N_1 = k_1, N_2 = 0$.

O teorema procede com o caso de espécies idênticas, onde temos que $\alpha = \beta$ =1.Através de uma análise similar podemos predizer o resultado da luta pela existência por todos os valores de α e β.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BRAUN,Martins; COURTNEY S.; DREWM, Donald *Differential Equation Models.*Nova Iorque: Springer-Verlog,1983.

[2]Zill, D. G. e Cullen, M. R.: "Equações Diferenciais". Makron Books Ltda. São Paulo. 2001.