

1. INTRODUÇÃO

Um dos modelos de crescimento populacional mais comumente usado por demógrafos é o modelo matricial de **Leslie**, desenvolvido em 1945. Este modelo descreve o crescimento da parte fêmea de uma população animal ou humana que está dividida em faixas etárias.

Neste trabalho fazemos uma exposição de um modelo matemático utilizado para analisar o crescimento de uma população por faixas etárias. Através deste modelo podemos investigar o crescimento da população ao longo do tempo, e determinar o limite da distribuição etária e a taxa de crescimento populacional. O trabalho aborda uma das inúmeras aplicações da Álgebra Linear e, por este motivo apresentamos alguns dos principais conceitos básicos utilizados.

2. CONCEITOS BÁSICOS

Apresentamos alguns conceitos básicos da Álgebra Linear que são utilizados neste estudo.

Definição 1: Dada uma matriz nxn **A**, dizemos que **v** é um autovetor de **A** se e somente se **A.v = λ.v**.

Definição 2: O número real ou complexo **λ** que satisfaz a equação vetorial **A.v = λ.v** é chamado de autovalor associado ao autovetor **v**.

Definição 3: Definimos polinômio característico de uma matriz nxn por **p(t) = det(A - t.I)**, onde **I** é a matriz identidade.

Definição 3: Uma Matriz quadrada **A** é chamada de diagonalizável se e somente se ela pode ser decomposta em:

onde **P** é matriz inversível.

$$A = P.D.P^{-1}$$

3. O MODELO MATEMÁTICO

Vamos supor que a idade máxima atingida por uma fêmea seja de **N** anos. Consideremos portanto a população dividida em **n** faixas etárias, cada uma com **n/N** anos de duração. Suponhamos que seja conhecida a variável que é a quantidade de fêmeas em cada faixa etária no instante inicial **t = 0**. Podemos então definir o vetor distribuição etária inicial que será dado por:

$$X^{(0)} = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

Para se estudar o processo de envelhecimento é usual observar a população em intervalos de tempo discretos, por exemplo **t0, t1, t2, ... , tk, ...** No modelo de Leslie vamos considerar a duração entre duas observações como sendo a duração da faixa etária. Assim podemos escrever:

$$tk = k.N/n$$

Vamos definir agora o vetor distribuição etária num instante **tk** como sendo:

$$X^{(k)} = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$$

onde

x_i^k : número de fêmeas na faixa etária **i** no tempo **tk**

O modelo matemático é descrito a partir das seguintes observações:

a) O número de fêmeas na faixa etária **1** no instante **tk** é igual a soma dos número de filhas nascidas em cada faixa etária entre os tempos **t(k-1)** e **tk**. Matematicamente isto significa que:

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \dots + a_n x_n^{(k-1)}$$

onde

a_i : número de filhas nascidas por fêmea na faixa etária **i**

b) O número de fêmeas na faixa etária **i+1** no instante **tk** é igual ao produto da fração de fêmeas da faixa etária **i** que sobrevive e passa para faixa **i+1** pelo número de fêmeas na faixa etária **i** no instante **tk**. Matematicamente, isto significa que:

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)} \quad i=1,2,3,\dots,n-1$$

onde

b_i : fração de fêmeas da faixa **i** que sobrevive e passa para a faixa **i + 1**

Matricialmente obtemos um sistema iterativo dado por:

$$X^{(k)} = L.X^{(k-1)} \quad k = 1,2,3,\dots \quad (1)$$

onde **L** é a matriz de Leslie que neste caso é dada por:

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

4. A DINÂMICA DO PROCESSO

Para estudarmos a dinâmica do processo vamos investigar os autovalores e autovetores associados a matriz de Leslie **L** que aparece na equação (1). Podemos provar os seguintes resultados com relação a matriz **L**.

Resultado 1: A Matriz **L** tem um único autovalor positivo de multiplicidade 1 com um único autovetor **X1** associado que possui todas as entradas positivas.

Resultado 2: Se **λ1** é o único autovalor positivo de **L** então vale

$$|\lambda_k| \leq \lambda_1 \text{ para todo } \lambda_k \text{ autovalor real ou complexo de } L$$

Quando $|\lambda_k| < \lambda_1$ dizemos que **λ1** é um autovalor dominante.

Resultado 3: Se duas entradas sucessivas da primeira linha da matriz de Leslie **L** são não nulas então **L** tem autovalor dominante.

Vamos supor agora que a Matriz de Leslie **L** tem autovalor dominante **λ1** e que a matriz **L** possa ser diagonalizável e portanto:

$$L = P \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

Segue que neste caso a equação dada em (1) fica da seguinte forma:

$$\frac{1}{\lambda_1^k} X^{(k)} = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{bmatrix} P^{-1} \cdot X^{(0)}$$

Passando o Limite quando **k** tende a infinito obtemos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_1^k} X^{(k)} \right) = P \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \cdot X^{(0)}$$

A ultima igualdade nos permite escrever:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lambda_1^k} X^{(k)} \right) = c \cdot x_1 \text{ onde } \begin{matrix} c & \text{é o autovetor} \\ x_1 & \text{associado ao autovalor } \lambda_1 \end{matrix} \quad (II)$$

A equação (II) nos dá:

$$X^{(k)} \cong c \cdot \lambda_1^k x_1 \quad (III)$$

Donde segue que: $X^{(k)} \cong \lambda_1 X^{(k-1)}$

Do exposto concluímos que para valores grandes de tempo **tk** que cada vetor distribuição etária é múltiplo escalar do vetor distribuição etária anterior. Segue que a proporção de fêmeas em cada faixa etária torna se constante. Observamos ainda que:

- a) $\lambda_1 = 1$ a população tende a se estabilizar.
- b) $\lambda_1 > 1$ a população acaba aumentando.
- c) $\lambda_1 < 1$ a população acaba diminuindo.

5. UM EXEMPLO: DISTRIBUIÇÃO ETÁRIA DE FÊMEAS HUMANAS

Um exemplo interessante de aplicação desta teoria está ligado ao estudo da população de mulheres do Canadá. Os parâmetros utilizados de nascimento e morte são do ano de 1965. Foi considerado um vetor distribuição etária inicial consistindo de 10 faixas etárias cada uma com cinco anos. Tal hipótese foi considerada admitindo que mulheres com mais de 50 anos não geram mais filhos. Seguem na tabela abaixo apenas os coeficientes da matriz de Leslie.

Intervalo de Idade	a_i	b_i
[0, 5)	0,0000	0,99651
[5, 10)	0,00024	0,99820
[10, 15)	0,05861	0,99802
[15, 20)	0,28608	0,99729
[20, 25)	0,44791	0,99694
[25, 30)	0,36399	0,99621
[30, 35)	0,22259	0,99460
[35, 40)	0,10457	0,99184
[40, 45)	0,02826	0,98700
[45, 50)	0,00240	..

Utilizando técnicas numéricas podemos aproximar o autovalor positivo e o autovetor associado por:

$$\lambda_1 = 1,07622 \text{ e}$$

$$X_1 = [1, 0,92594, 0,85881, 0,79641, 0,73800, 0,68364, 0,63281, 0,58482, 0,53897, 0,49429]^T$$

Assim se as mulheres canadenses continuarem a se reproduzir e morrer como fizeram em 1965, depois de um período de tempo bem longo seu número tenderá a aumentar a uma taxa de 7,62% a cada cinco anos.

6- BIBLIOGRAFIA

Anton, H., Rorres, C., Álgebra Linear com Aplicações, Porto Alegre, Bookman, 2001