

Aplicação das Equações Não Lineares no Estudo de Biodigestores

Jeferson Brambatti Granjeiro (matebram@yahoo.com.br) - Suetônio de Almeida Meira
FCT - UNESP



Objetivo: Um biodigestor consiste basicamente de um tanque de fermentação anaeróbica de matérias orgânicas frescas, substrato ou biomassa, produzindo um gás combustível composto essencialmente de metano e dióxido de carbono, onde tal mistura recebe o nome de biogás. Tal gás é cada dia mais utilizado como fonte de energia alternativa, por isso, espera-se que através da análise matemática, maximizar processo de produção de gás.

Metodologia: A composição das bactérias que atuam na fermentação do substrato e na produção de biogás são extremamente complexos. Para esse estudo, vamos utilizar como ferramenta as Equações Não Lineares por meio de um estudo qualitativo. Assim, vamos propor modelos que relacionem apenas duas das componentes básicas de um biodigestor:

$x=x(t)$: quantidade de bactérias que produzem o biogás, e $y=y(t)$: quantidade de biogás produzido que continua no interior do biodigestor.

Estamos supondo que x e y são variáveis dependentes do tempo t , onde x representa uma população de bactérias generalizadas, onde a sua variação depende de sua própria quantidade e seu crescimento pode ser inibido pelas condições ambientais como: espaço, alimentação, acidez, temperatura, etc., ou pela presença do próprio biogás.

A variação dessa quantidade de biogás produzido no interior do biodigestor é proporcional à quantidade de bactérias presentes e sua diminuição se deve ao fato do tipo de retirada efetuada. Tais hipóteses estão relacionadas no seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x) - pxy \\ \frac{dy}{dt} = kx - h(y,t) \end{cases} \quad (1)$$

onde as constantes p e k são positivas; sendo que $F(x)$ irá fornecer a variação das bactérias, independentemente da presença de biogás; e o termo pxy será responsável pelo fator de inibição, e a função $h(y,t)$ será a responsável pelo tipo de retirada de biogás que é efetuada.

Vamos analisar o caso em que todo o gás produzido é mantido no biodigestor ($h(y,t) = 0$)

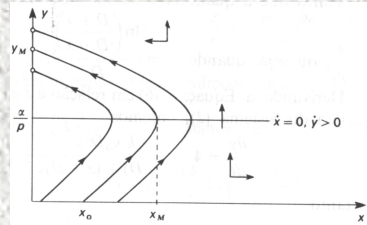
i) $F(x) = \alpha x$ (válido para o início da biodigestão, onde o crescimento das bactérias ainda não está inibido)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x - pxy \\ \frac{dy}{dt} = kx \end{cases} \quad (2)$$

Neste caso, $x=0$ é uma reta de equilíbrio (se não existirem bactérias não haverá fermentação). Vamos analisar as curvas-soluções no plano de fase, $\frac{dx}{dy} = \frac{\alpha - py}{k}$ ($x \neq 0$) (3)

Integrando, a equação separável, obtemos $x = \frac{\alpha}{k}y - \frac{p}{2k}y^2 + c$. Se supormos $c = x_0$, obtemos:

$$x = \frac{\alpha}{k}y - \frac{p}{2k}y^2 + x_0 \quad (4)$$



x como função de y atinge seu valor máximo $x_M(x_0) = x_0 + \frac{\alpha^2}{2kp}$

quando $y = \frac{\alpha}{p}$, enquanto que y é limitado por

$$y_M(x_0) = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2kx_0p}}{p} > \frac{\alpha}{p}$$

Os dois valores $\frac{\alpha}{p}$ e y_M dependem da quantidade inicial de bactérias. Por outro lado, substituindo a expressão de x dada em (4) na segunda equação do sistema (2), obtemos a equação separável

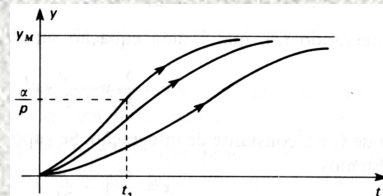
$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \frac{p}{2}y^2 + x_0k$$

Separando as variáveis e integrando, obtemos

$$y(t) = \frac{y_* y_0 (1 - e^{-Dt})}{y_* - y_0 e^{-Dt}} \quad \text{onde } D = \sqrt{\alpha^2 + 2pkx_0} \quad (6) \quad \text{e}$$

$$y_M = \frac{\alpha + D}{p} > 0 \quad \text{e} \quad y_* = \frac{\alpha - D}{p} < 0$$

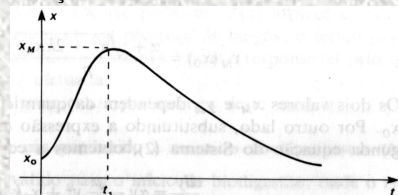
Assim, quando $t \rightarrow \infty$, $y(t)$ tende a y_M , ou seja, a produção do gás é limitada.



Derivando a equação (6) em relação a t e substituindo na segunda equação do sistema (2), obtemos

$$\frac{dy}{dt} = 4 \frac{kx_0 D^2 e^{-Dt}}{[(\alpha - D) + (\alpha + D)e^{-Dt}]^2} \quad \text{e portanto} \quad x(t) = \frac{4x_0 D^2 e^{-Dt}}{[(\alpha - D) + (\alpha + D)e^{-Dt}]^2}$$

o que mostra que quando $t \rightarrow \infty$, as bactérias tendem à extinção



Conclusão: Com essa análise é possível determinar o tempo em que a quantidade de produção de bactérias é máxima. Dessa forma, é possível maximizar a produção de biogás, minimizando o tempo de produção.

Referências Bibliográficas

- [1] Figueiredo, D.G. & Neves, A.F. Equações Diferenciais Aplicadas. Rio de Janeiro, IMPA, 1997.
- [2] Arnold, V.I. Differential Equations. MIR, 1974.
- [3] Braun, M. Differential Equations, Dynamical Systems, and linear Algebra, Academic Press, 1974.