

Refinamento de Malha Adaptativa Ordenada por uma Curva de Hilbert Modificada Tridimensional

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Matemática Computacional
Fabrício Nunes da Costa - fabrimac@dcc.ufmg.br
Orientadores: Denise Burgarelli e Rodney Josué Biezuner

Introdução

Neste trabalho foi desenvolvido uma estrutura de dados para uma malha tridimensional baseada na extensão da estrutura usada em [1] e [2] para malhas bidimensionais. As células da malha são ordenadas por uma curva de Hilbert modificada tridimensional, generalizando as idéias em [1] e [2]. A malha pode ser aplicada em qualquer problema de EDPs tridimensionais, e em qualquer geometria, através do método de volumes finitos.

Estrutura de dados

A malha inicial é composta por oito células iguais, em formato cúbico de lado $1/2$, dispostas como mostra a figura 1.

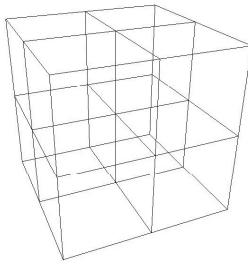


Figura 1: Malha inicial

Ela é representada por um grafo bidirecional. Os nodos que representam as células da malha são denominados pretos. Define-se a profundidade de cada célula da malha inicial por 1. Quando uma célula de profundidade n sofre um refinamento, ela origina oito novas células de profundidade $n + 1$. Cada nodo preto possui seis ponteiros que apontam para os vizinhos do norte, sul, leste, oeste, frente e trás. Os nodos pretos de mesma profundidade são conectados diretamente. Para indicar que um nodo não tem vizinho em uma determinada direção, ou seja, que a célula pertence ao bordo da malha, tal nodo é conectado à um outro nodo especial, chamado de terra.

A conexão entre nodos pretos de profundidades diferentes é feita com auxílio dos nodos de transição. Os nodos de transição possuem 5 ponteiros e tem a função de conectar um nodo preto ou um de transição de profundidade n em quatro outros nodos pretos ou de transição de profundidade $n + 1$. A figura 2 é um esquema do grafo da malha inicial. A representação do nodo terra foi omitida para tornar a figura mais clara, mas entende-se que cada nodo de transição da figura está conectando quatro nodos pretos ao nodo terra.

Referências

- [1] Burgarelli, *Modelagem Computacional e Simulação Numérica Adaptativa de Equações Diferenciais Parciais Evolutivas Aplicadas a um Problema Termoacústico*, PUC-Rio, 1998.
- [2] Burgarelli, Kischinhevsky e Biezuner, *A new adaptive mesh refinement strategy for numerically solving evolutionary PDEs*, Preprint, 2004.

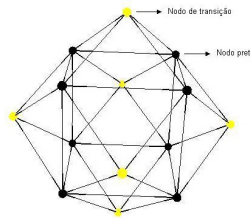


Figura 2: Estrutura da malha inicial

Refinamento e desrefinamento

Refinar uma célula significa dividi-la em oito células iguais. Por exemplo, refinando uma célula da malha inicial, obtém-se a malha da figura 3. Observe o aparecimento de células brancas para fazer a ligação entre células de profundidades diferentes.

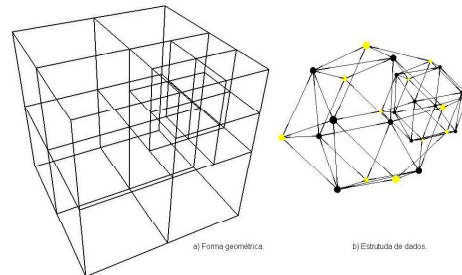


Figura 3: Refinando a malha inicial

Desrefinar é o procedimento oposto. Oito células irmãs de profundidade n transformam-se em uma só de profundidade $n + 1$. Ao desrefinar as células de profundidade 2 da malha da figura 3 obtém-se novamente a configuração inicial da malha.

As operações de refinamento e desrefinamento envolvem apenas mudanças locais na malha e apresentam ordens de complexidade de tempo constantes.

Curva de Hilbert Modificada

É mantida a todo momento uma ordenação total dos nodos pretos do grafo. O método desenvolvido para fazer tal ordenação é baseado em uma extensão para três dimensões da curva de Hilbert modificada bidimensional descrita em [1] e [2]. Além dos seis ponteiros que apontam para cada direção, os nodos pretos ainda possuem mais dois ponteiros que apontam para

a próxima célula e para a célula anterior. Ou seja, as células são organizadas dentro de uma lista duplamente encadeada ordenada por uma curva de Hilbert modificada.

A curva possui a propriedade de que em cada etapa da sua construção, um arco de comprimento muito grande fica contido em uma região de pequeno volume. Essa propriedade é importante no contexto de processamento em paralelo [1].

A figura 4 é uma ilustração da malha da figura 3 ordenada pela curva de Hilbert modificada.

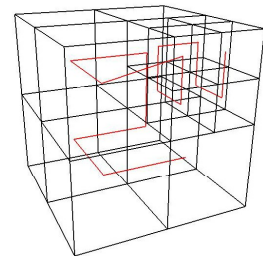


Figura 4: Curva de Hilbert Modificada

A figura 5 mostra o modelo da curva de Hilbert modificada em uma malha com 82 células.

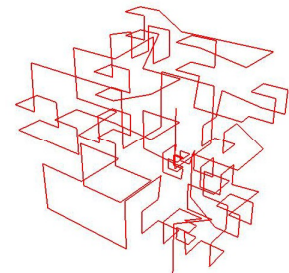


Figura 5: Curva de Hilbert modificada: malha com 82 células

Comentários e conclusões

As estratégias de ordenação aqui adotadas permitem a resolução de problemas em paralelo de forma bastante eficiente, minimizando a troca de mensagens entre os processadores. Uma sugestão de trabalho futuro seria implementar a mesma malha em um sistema paralelo, a fim de comprovar sua eficiência.

Mostrou-se passo a passo como gerar a curva de Hilbert modificada em três dimensões. O resultado foi um algoritmo simples que pode facilmente ser implementado e usado em outras aplicações.