Um Estudo sobre Teoria de Categorias e Intervalos Numéricos

Carine B. Loureiro – loureiro@pucrs.br
Dalcídio M. Claudio – dalcidio@pucrs.br, Liara A. dos S. Leal – liara@pucrs.br

PUCRS - Campus Uruguaiana
Faculdade de Matemática – Porto Alegre - RS

TEORIA DE CATEGORIAS

A teoria de categorias é um campo relativamente recente da matemática pura, tendo-se originado na área de topologia algébrica; foi formulada com precisão a partir de 1945, por S. Eilenberg e S. Mac Lane [3]. A idéia básica nesta teoria é enfatizar os morfismos entre objetos ao invés de analisar os objetos individualmente.

INTERVALOS NUMÉRICOS

A aritmética intervalar surgiu como uma metodologia para controle de erros com limites confiáveis, pois utiliza intervalos reais para representar valores infinitos, desconhecidos, ou valores contínuos. O estudo da aritmética intervalar é atribuído, inicialmente, a R.E. Moore [1], embora o conceito de intervalo tenha aparecido antes da era cristã.

A teoria de categorias e aritmética intervalar são importantes ferramentas empregadas atualmente em computação. Portanto, a possibilidade de integração destas duas teorias poderá gerar resultados que auxiliem a área de Matemática Computacional no que se refere, por exemplo, a problemas de computação intervalar. Um importante problema que vem sendo pesquisado atualmente é o problema de calcular a imagem de um polinômio com dados intervalares. Este problema é considerado computacionalmente intratável por Kreinovich [2].

Objetivo do trabalho: a partir da integração dos estudos sobre aritmética intervalar e teoria de categorias, pretende-se formalizar a estrutura de dados intervalares, visando definir uma categoria que possui como objetos intervalos numéricos e como morfismos uma operação adequada que permita relacionar os intervalos entre si, de modo a trazer resultados significativos à informática teórica, na área de computação científica.

Uma categoria é uma seis-upla do tipo

$$<\mathbf{Obj}, \mathbf{Mor}, \partial_0, \partial_1, \iota, \mathbf{o}>,$$

onde **Ob** são os objetos da categoria, **Mor** são os morfismos (setas), ∂_0, ∂_1 são denominados domínio e codomínio, respectivamente. A operação identidade é indicada por ι e **o** é a operação de composição, sendo que esta última deve respeitar a propriedade de associatividade.

Categoria INT: $< \mathbf{Obj_I}, \mathbf{Mor_I}, \partial_0, \partial_1, \iota, \mathbf{o} >$

Obj_I: é a coleção de todos os intervalos numéricos.

Mor_I: é a relação de inclusão, ou seja um intervalo A está relacionado com o intervalo B quando $A \subseteq B$.

$\partial_0, \partial_1: Mor_I \to Obj_I$ operações denominadas domínio e codomínio. Sendo f, um morfismo qualquer, tem-se que $\partial_0(f) = A$ e $\partial_1(f) = B$, o qual denota-se por $f: A \to B$.

o: $(Mor_I)^2 \to Mor_I$ é a operação de composição. Sejam os morfismos $f: A \to B$ e $g: B \to C$, então $g\mathbf{o}f: A \to C$. Na categoria INT a composição é definida através da propriedade transitiva existente na relação de inclusão.

$\iota: Obj_I \to Mor_I$ é a operação denominada identidade, tal que $\iota_A: A \to A$, onde A é objeto. A identidade, na categoria INT, é verificada pelo fato de que para qualquer que seja o intervalo A, $A \subseteq A$.

Morfismos na Categoria INT

- operação de União de intervalos (primeira possibilidade verificada – descartada);
- Inclusão de intervalos.

Vantagens da utilização da inclusão de intervalos como morfismos:

- existência da categoria **Poset**,
- comparada com a união de intervalos, a relação de inclusão é mais apropriada para problemas de otimização,
- a propriedade associativa pode ser definida a partir da propriedade transitiva empregada na operação de inclusão de intervalos,
- a identidade é assegurada pelo fato de cada intervalo estar contido nele mesmo.

Referências:

1. Claudio, D. M. et al. *Cálculo Numérico Computacional*. Atlas, São Paulo, 2000.
2. Kreinovich, V. et al. *Computational Complexity and feasibility of data Processing and Interval Computations*. Kluwer Academic Publishers, 1998.
3. Lane, S. M. *Categories for the Working Mathematician*. Springer-Verlag, New York, 1971.

Parte deste trabalho é financiado pelo CNPQ