Leonardo Silveira Borges – lsbplsb@yahoo.com - MTM/UFSC

Licio Hernanes Bezerra – licio@mtm.ufsc.br - MTM/UFSC

A análise espectral de operadores em espaços de dimensão infinita é complexa. Por exemplo, o espectro do operador de Toeplitz em l_2 (o espaço das seqüências quadrado-somáveis) dado pela matriz infinita abaixo é $f(D)$, em que D é a bola unitária e $f(z) = z + z^2$. Note que o espectro dos operadores em dimensão finita dada pelas matrizes resultantes de truncamento é formado apenas pelo zero.

O espectro da matriz infinita $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ & 0 & 1 & 1 & \ddots \\ & & 0 & 1 & \ddots \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}$ não é limite do espectro das matrizes finitas $A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$

A partir de 1990, uma nova ferramenta passou a ser explorada - o pseudo-espectro - que preserva as informações de um operador quando este é truncado. Seja T um operador linear em um espaço de Hilbert, com norma || ||. O ε-pseudoespectro de um operador T é, por definição, o seguinte subconjunto do plano complexo:

$$\Lambda_\varepsilon(T) = \{ z \in C \; ; \; \|(z.I - T)^{-1}\| \geq \varepsilon^{-1} \}.$$

Lembrar que, no caso de $\|(z.I - T)^{-1}\|$ não ser limitada, $z \in \Lambda(T)$, o espectro de T. Ou seja, o espectro está contido em todos os ε-pseudoespectros. Uma definição equivalente é a seguinte:

$$\Lambda_\varepsilon(T) = \{ \overline{z \in C \; ; \; z \in \Lambda(T+E) \text{ para algum E tal que } \|E\| \leq \varepsilon} \}$$

No caso de T ser um operador em espaços de dimensão finita, associado a uma matriz A, essas duas definições são ainda equivalentes à seguinte:

$$\Lambda_\varepsilon(A) = \{ z \in C \; ; \; \sigma_{MIN} (z.I - A) \leq \varepsilon \},$$

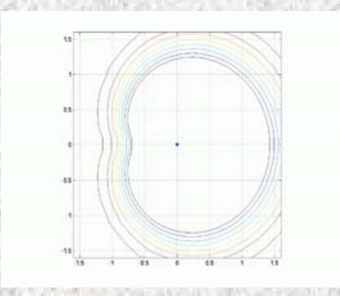
em que σ_{MIN} **denota o menor valor singular da matriz.** O resultado importante para matrizes triangulares (não diagonais) de Toeplitz é o seguinte:

$$\mathrm{Lim}_{\varepsilon \to 0} \; \lim_{n \to \infty} \; \Lambda_\varepsilon (A_n) = \Lambda (A)$$

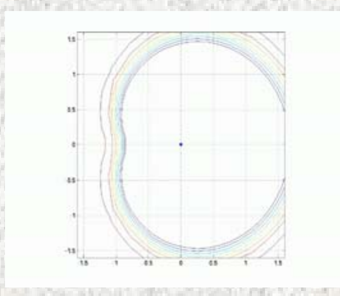
Um algoritmo que utiliza a SVD para o cálculo dos pseudo-espectros de uma matriz A necessita que, primeiro, seja criada uma malha no plano complexo, ou seja, uma região com vários pontos distribuídos segundo algum padrão pré-estabelecido; segundo, para cada ponto z da malha, devemos formar a matriz B = (z.I – A), em que I é a matriz identidade; por fim, deve-se calcular seu menor valor singular.

Neste trabalho, vamos apresentar resultados a partir de dois métodos de cálculo de espectro parcial de uma matriz: um é baseado no método de Arnoldi, utilizando projeções em sub-espaços de Krylov, que calcula matrizes de Hessemberg cujos espectros são aproximações do espectro da matriz original; outro baseia-se no método de iteração inversa que, sob certas condições, converge para um autovetor associado ao menor autovalor em valor absoluto.

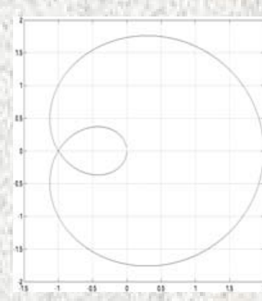
Na figura 1 temos curvas de nível dos pseudo-espectros para um truncamento de n = 80, na figura 2 o operador truncado em n = 150 e na figura 3 temos o espectro do operador infinito (o interior mais a fronteira). Observe que as curvas de nível relativas aos pseudo-espectros tendem a se comportar como a fronteira do espectro do operador infinito.



n = 80



n = 100



Espectro do operador infinito