

# Bit Quântico e Portas Quânticas na Esfera de Bloch

## Visualização em Maple

Virginia S. Costa e Luiz M. Carvalho  
Departamento de Matemática Aplicada - Instituto de Matemática e Estatística  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro

### Modelo para um Bit Quântico e sua forma Polar

- O Bit Quântico (*q-bit*) é a menor unidade de informação para a Computação Quântica.
- O q-bit pode se apresentar nos estados

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- E num estado que é a combinação linear (neste contexto, chamada de *superposição*) dos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , isto é,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta \in \mathbb{C}$  são chamados *amplitudes* e  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2(\mathbb{C})$ .

- Porém, o processo de medida perturba inevitavelmente o estado do q-bit produzindo um colapso não-determinístico de  $|\psi\rangle$  para  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ .
- Após uma medida, obtemos o  $|0\rangle$  com probabilidade  $|\alpha|^2$  ou  $|1\rangle$  com probabilidade  $|\beta|^2$ .
- Sendo  $|\alpha|^2$  e  $|\beta|^2$  probabilidades, temos que

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2)$$

e, conseqüentemente,

$$\|\psi\| = 1.$$

- Escrevendo  $\alpha = a + ib$  e  $\beta = c + id$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , temos  $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $|\beta| = \sqrt{c^2 + d^2}$ , e como  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , temos
- $$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \quad (3)$$
- A partir da Eq. (3), interpretamos o q-bit como um vetor unitário  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  e a esfera unitária  $S^3$  de  $\mathbb{R}^4$  como o lugar geométrico dos q-bits.
  - Sabendo que as amplitudes  $\alpha$  e  $\beta$  da Eq.(1) são números complexos, podemos expressá-las em coordenadas polares, isto é,

$$\alpha = |\alpha| e^{i \text{Arg}(\alpha)} \quad e \quad \beta = |\beta| e^{i \text{Arg}(\beta)},$$

onde  $0 \leq \text{Arg}(z) < 2\pi$  é o argumento do complexo  $z$  e  $|z|$  o seu módulo.

- Podemos, ainda, definir  $\text{Arg}(\alpha) = \gamma$  e  $\text{Arg}(\beta) = \gamma + \phi$ , onde as operações entre ângulos devem ser consideradas em aritmética módulo  $2\pi$ . Assim, temos

$$|\psi\rangle = |\alpha| e^{i\gamma} |0\rangle + |\beta| e^{i(\gamma+\phi)} |1\rangle.$$

- Sendo  $|\alpha| \geq 0$ ,  $|\beta| \geq 0$  e  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ , podemos definir  $\xi$  por meio das equações

$$\cos(\xi) = |\alpha| \quad e \quad \sin(\xi) = |\beta|,$$

onde  $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$ .

- Fazendo  $\theta = 2\xi$ , temos

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right], \quad (4)$$

- Com

$$\theta = 2 \arccos(|\alpha|) = 2 \arcsin(|\beta|),$$

$$\phi = \text{Arg}(\beta) - \text{Arg}(\alpha),$$

$$\gamma = \text{Arg}(\alpha),$$

onde  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$  e  $\gamma \in [0, 2\pi)$ .

### A Esfera de Bloch

- Note que, se tentarmos modificar o q-bit expresso pela Eq. (4) através de um operador unitário, o fator  $e^{i\gamma}$  não se altera:

$$U|\psi\rangle = e^{i\gamma} U \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle \right],$$

onde  $U$  é o operador unitário de 1 (um) q-bit (isto é, uma matriz unitária  $2 \times 2$ ).

- Observe também que, o fator  $e^{i\gamma}$  não altera a probabilidade de se obter  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$  no momento da medida, pois

$$|e^{i\gamma} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)| = |e^{i\gamma}| \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right| = \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right|,$$

assim como,

$$\begin{aligned} |e^{i(\gamma+\phi)} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)| &= |e^{i\gamma}| |e^{i\phi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)| = \\ &= |e^{i\phi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|. \end{aligned}$$

- Devido a essas propriedades, para fins de representação, podemos desprezar o fator  $e^{i\gamma}$  (chamado *fator de fase global*) e escrever a Eq. (4) assim:

$$|\psi\rangle_B = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle. \quad (5)$$

- Escrevendo

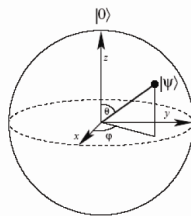
$$\begin{aligned} |\psi\rangle_B &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |0\rangle + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle + \\ &+ i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |1\rangle, \end{aligned}$$

isto é, o vetor  $|\psi\rangle_B$  pertence a um subespaço vetorial ( $\mathbb{V}$ ) de  $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$  de dimensão 3 e base  $\{|0\rangle, |1\rangle, |\psi\rangle\}$ . Como este subespaço está definido sobre o corpo dos reais, ele é isomorfo a  $\mathbb{R}^3$  (Veja [2]).

- Considerando este Isomorfismo, pode-se encontrar uma representação para os q-bits em  $\mathbb{R}^3$ : A *Esfera de Bloch*.
- Considerando a forma polar de um q-bit, expressa na Eq. (4), dizemos que o *Vetor de Bloch* é dado por

$$B|\psi\rangle_B = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \sin(\theta) \\ \sin(\phi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (6)$$

onde  $\phi \in [0, 2\pi)$  e  $\theta \in [0, \pi]$ .

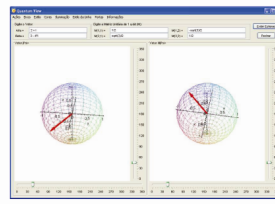


Esfera de Bloch

- A partir da Eq. (6), podemos escrever o seguinte algoritmo em Maple:

```
bloch_vector:=proc(alpha, beta)
local X, Y, Z, arg_alpha, arg_beta,
abs_alpha;
arg_alpha:=argument(alpha);
arg_beta:=argument(beta);
abs_alpha:=abs(alpha);
X:=cos(arg_beta-arg_alpha)
* sin(2*arccos(abs_alpha));
Y:=sin(arg_beta-arg_alpha)
* sin(2*arccos(abs_alpha));
Z:=cos(2*arccos(abs_alpha));
Vector([X, Y, Z]);
end;
```

- E, utilizando o pacote Maplets (veja [1]), conseguimos a interface gráfica vista na figura a seguir.

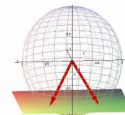


Interface Gráfica - pacote Maplets do Maple.

- Através dessa visualização, podemos observar algumas propriedades da Esfera de Bloch, assim como, podemos utilizar o programa para executar a aplicação de *portas quânticas de um q-bit* (veja [4], p. 17).

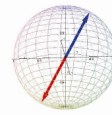
### Propriedades da Esfera de Bloch

- 1ª Propriedade:** Quaisquer dois vetores de Bloch que pertençam ao mesmo plano, paralelo ao plano XY, representam q-bits que têm probabilidades iguais de produzirem  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ , ao serem medidos.



Vetores com o mesmo  $\theta$ .

- 2ª Propriedade:** Quaisquer dois vetores de Bloch antípodas são representantes de dois q-bits ortogonais.



Vetores de Bloch antípodas.

- 3ª Propriedade:** Considere dois q-bits  $|\psi\rangle$  e  $|\psi'\rangle$ , então podemos dizer que:

$$|\psi'\rangle = e^{i\delta} |\psi\rangle \text{ se e somente se } |\psi\rangle \text{ e } |\psi'\rangle \text{ tem Vetores de Bloch iguais, } \forall \delta \in [0, 2\pi).$$

### Portas Quânticas de um Q-Bit

- Das matrizes de Pauli, surge uma outra classe de matrizes, as *Matrizes de Rotação* sobre os eixos  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ , definidas como

$$\begin{aligned} R_x(\theta) &\equiv e^{-\frac{i\theta X}{2}}, \quad R_y(\theta) \equiv e^{-\frac{i\theta Y}{2}} \\ e \quad R_z(\theta) &\equiv e^{-\frac{i\theta Z}{2}}. \end{aligned}$$

onde

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

são as matrizes de Pauli.

- A partir das matrizes de Rotação, que representam rotações em torno dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  na esfera unitária do  $\mathbb{R}^3$ , podemos observar o comportamento de portas quânticas de um q-bit utilizando os seguintes resultados:

- Seja  $U$  um operador unitário de um q-bit, então

$$U = e^{i\alpha} R_{\hat{n}}(\theta), \quad (7)$$

onde  $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$  e  $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{R}^3$  é um vetor unitário.

- (Decomposição Z-Y) Seja  $U$  um operador unitário de um q-bit, então existem  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  tais que

$$U = e^{i\alpha} R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta). \quad (8)$$

- (Decomposição X-Y) Seja  $U$  um operador unitário de um q-bit, então existem  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  tais que

$$U = e^{i\alpha} R_x(\beta) R_y(\gamma) R_x(\delta). \quad (9)$$

- A partir desses resultados podemos concluir que as portas quânticas de um q-bit se comportam como um conjunto de rotações na Esfera de Bloch. Vejamos um exemplo com a porta de Hadamard.

### Exemplo com a Porta de Hadamard

- A Porta de Hadamard, definida por

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

é uma das mais usadas na Computação Quântica. Como a porta de Hadamard é um operador unitário, podemos escrevê-lo na forma da Eq.(7). Assim,

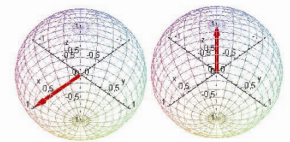
$$H = e^{i\frac{\pi}{2}} R_{\hat{n}}(\pi),$$

onde  $\hat{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .

- Ou seja, a porta de Hadamard, na Esfera de Bloch, se comporta como uma rotação de  $180^\circ$  em torno do vetor  $\hat{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ .
- Também podemos escrever a porta  $H$  em função das matrizes de rotação em torno dos eixos  $x$  e  $y$ , segundo a Eq. (8). Assim,

$$H = e^{i\frac{\pi}{2}} R_z(0) R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) R_z(\pi),$$

ou, tendo em vista que  $R_z(0) = I, H = e^{i\frac{\pi}{2}} R_y\left(\frac{\pi}{2}\right) R_z(\pi)$ , o que, na Esfera de Bloch, caracteriza uma rotação de  $90^\circ$  em torno do eixo  $y$  seguida de uma rotação de  $180^\circ$  em torno do eixo  $z$ , como mostra a figura a seguir, que foi obtida através do programa.



Aplicação da porta de Hadamard no vetor  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ . À esquerda, temos a representação deste vetor na esfera, i.e.,  $B(|\psi\rangle)$ , já à direita temos a representação de  $H(|\psi\rangle)$ .

- Em nosso trabalho, também observamos as portas  $S$  (Phase Gate) e  $\frac{\pi}{8}$ , além da porta de Hadamard.

### Referências

- Maplets beginner's guide. Waterloo Maple Inc., 2001.
- L.M. Carvalho, C.C. Lavor, and V.S. Motta. Descrição matemática da esfera de bloch. *Anais do VII Encontro de Modelagem Computacional*, pages 1-9, 2004.
- L.M. Carvalho, C.C. Lavor, and V.S. Motta. Portas quânticas e a esfera de bloch. *submetido a TEMA*, Agosto 2004.
- M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- R. Portugal. *Introdução ao maple*. 2002.
- R. Portugal, C.C. Lavor, L.M. Carvalho, and N. Maculan. *Uma Introdução à Computação Quântica*, volume 8. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), São Carlos, 1st edition, 2004.