

Investigação da condução de calor unidimensional e bidimensional em regime permanente

Juliano Evádio Baumer¹, Viviana Cocco Mariani²

¹Graduação em Engenharia Mecânica

²Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM

Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR

Rua Imaculada Conceição, 1155, 80215-901, Curitiba, PR

E-mail: juliano.baumer@terra.com.br, viviana.mariani@pucpr.br

Resumo. O presente trabalho investiga o processo de transferência de calor por condução em algumas geometrias. Primeiro investiga-se a condução de calor em uma parede plana, em regime permanente. Após estuda-se a condução em uma parede plana sem geração de energia e com geração de energia uniforme no seu interior. Outro problema investigado é a condução em uma placa bidimensional de largura (L) e altura (W) explorando diferentes condições de contorno. Quando possível obtém-se a solução analítica através da integração das equações ou através do método de separação de variáveis. Os métodos numéricos de diferenças finitas e volumes finitos são utilizados para resolver as equações diferenciais e os resultados comparados entre si e com a solução analítica.

1. Introdução

Ao ouvir falar no termo transferência de calor, muitas vezes as pessoas não se dão conta de que este assunto está muito presente em suas vidas. Seja tomando um banho de sol na praia, ou esquentando uma chaleira de água sobre o fogão. Pode ser num dia frio de inverno, onde o calor do interior da casa é transferido e perdido para o exterior, através das paredes. Em todas essas situações e muitas outras o calor é o personagem principal que pode ser transferido por três modos: condução, convecção e/ou radiação. A abordagem deste projeto está na condução, que necessita de um meio sólido, líquido ou gasoso para se propagar [1].

Os problemas estudados visam às condições de regime permanente (o tempo não influi na transferência de calor), em coordenadas cartesianas (x, y, z). Ainda, abordou-se no presente trabalho a condução em uma e duas dimensões.

Estes problemas são modelados por equações diferenciais, que podem ser resolvidas na forma analítica e/ou numérica. Posteriormente, a solução dessas equações foi implementada no Matlab e no Ansys, de modo a obter a representação gráfica para a solução. Estes gráficos mostram a forma como se dá a distribuição do calor no problema em questão. Por fim, compara-se a solução analítica com a numérica de cada problema, verificando-se nos métodos numéricos o número de iterações necessário para a convergência, a estimativa de erro adotada e o refino de malha.

2. Equações Governantes

A equação diferencial ordinária de segunda ordem que expressa a condução de calor em coordenadas cartesianas é:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

onde $\partial T/\partial x$ é a componente do gradiente de temperatura na direção x, $\partial T/\partial y$ é a componente do gradiente de temperatura na direção y, $\partial T/\partial z$ é a componente do gradiente de temperatura na direção z, $\partial T/\partial t$ é a taxa de variação da temperatura com o tempo, c_p é o calor específico [J/kg°C], ρ é a massa específica [kg/m³], k é a condutividade térmica [W/m°C] e q é a taxa de geração de energia [W/m³] [1].

Ainda pode-se ter uma expressão simplificada quando a condutividade térmica é constante, escrita na forma de derivadas parciais de segunda ordem, como:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

Na equação (2) percebe-se a presença do termo α , chamado de difusividade térmica. Quanto maior o valor de α mais rapidamente o calor irá se difundir através do material. De posse da equação diferencial da condução de calor partiu-se para a análise das simplificações que podem ser adotadas em cada problema.

Se a condução for em regime permanente tem-se $\partial T/\partial t = 0$, quando for em um domínio unidimensional, por exemplo, com a temperatura variando apenas na direção x tem-se $\partial^2 T/\partial y^2 = \partial^2 T/\partial z^2 = 0$, quando o domínio é bidimensional, por exemplo, com a temperatura variando nas direções x e y tem-se $\partial^2 T/\partial z^2 = 0$.

3. Paredes Planas

Os problemas estudados no presente trabalho referem-se a paredes planas, com e sem geração de energia no seu interior, e a placas bidimensionais de espessura desprezível. Primeiramente as paredes planas serão investigadas analiticamente e numericamente e seus resultados apresentados.

Na Figura 1 é apresentada uma parede plana, sem geração de energia interna, sendo composta de um único

¹ Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/PUCPR

material. Este é um problema que pode ser resolvido pela equação da condução de calor unidimensional expressa por:

$$\partial^2 T / \partial x^2 = 0 \quad (3)$$

Neste problema, a parede possui uma temperatura T_a mais baixa em $x = 0$, e mais alta, T_b , em $x = L$. Sendo assim, essas são consideradas as condições de contorno deste problema.

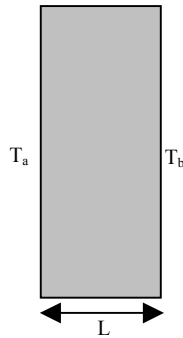


Figura 1: Parede plana uniforme

A solução analítica é obtida integrando-se duas vezes a equação (3) e usando as condições de contorno:

$$T(x) = \left(\frac{T_b - T_a}{L} \right) x + T_a \quad (4)$$

A solução numérica foi obtida via Método das Diferenças Finitas (MDF). Para isso expandiu-se a temperatura nos pontos $i + 1$ e $i - 1$ em torno do ponto i via série de Taylor, usando discretização estruturada, conforme apresentado na Figura 2 [2],

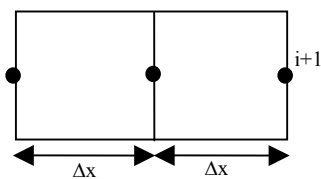


Figura 2: Discretização unidimensional para o MDF.

$$T_{i+1} = T_i + \frac{dT}{dx} \Big|_i \Delta x + \frac{d^2T}{dx^2} \Big|_i \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots$$

$$T_{i-1} = T_i - \frac{dT}{dx} \Big|_i \Delta x + \frac{d^2T}{dx^2} \Big|_i \frac{\Delta x^2}{2!} + \dots$$

Assim a partir das duas equações anteriores obtém-se:

$$\frac{d^2T}{dx^2} \Big|_i = \frac{T_{i+1} + T_{i-1} - 2T_i}{\Delta x^2} \quad (5)$$

Substituindo a equação (5) na equação (3) e simplificando obtém-se:

$$T_i = \frac{T_{i+1} + T_{i-1}}{2} \quad (6)$$

A solução através do Método dos Volumes Finitos será omitida para este problema.

Se a parede plana possui geração de energia a equação (3) fica:

$$\partial^2 T / \partial x^2 = -q / k, \quad (7)$$

cuja solução analítica é,

$$T(x) = -\frac{qx^2}{2k} + C_1x + C_2 \quad (8)$$

Para obter as constantes de integração da equação (8) pode-se investigar quatro condições de contorno, conforme ilustrado na Figura 3.

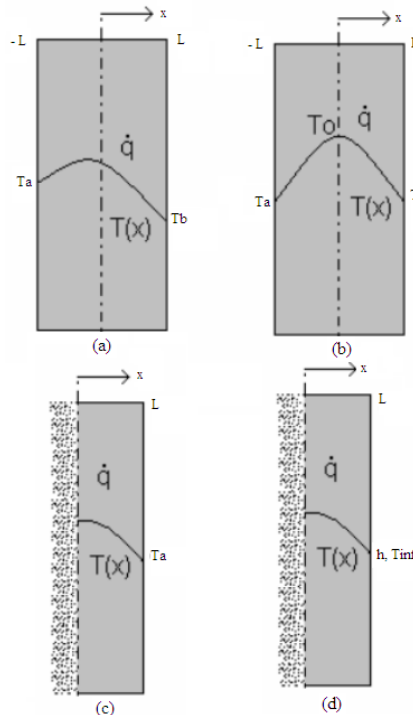


Figura 3: Aspecto da distribuição da temperatura ao longo de paredes com geração interna de calor.

3.1 Condições de Contorno Assimétricas

Utilizando as condições de contorno assimétricas apresentadas na Figura 3a a solução analítica é:

$$T(x) = \left[\frac{\Delta T}{L} + \frac{q}{2k} (L - x) \right] x + T_a \quad (9)$$

onde $\Delta T = T_b - T_a$.

A equação (7), para as mesmas condições de contorno, será resolvida a seguir pelo método de diferenças finitas usando como ilustração uma malha formada por 6 pontos nodais, conforme apresentado na Figura 4 [3].

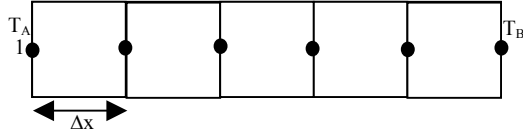


Figura 4: Malha usada em Diferenças Finitas.

Através do MDF a discretização para os pontos nodais internos ao domínio fornece os seguintes valores para os coeficientes nodais e para o termo fonte:

$$A_e = k/\Delta x \text{ (coeficiente nodal na face leste)}$$

$$A_w = k/\Delta x \text{ (coeficiente nodal na face oeste)}$$

$$A_p = A_e + A_w \text{ (coeficiente nodal central)}$$

$$S = q \cdot \Delta x \text{ (termo fonte)}$$

Logo a equação discreta pelo MDF para $2 \leq i \leq n-1$, é:

$$T_i = (A_e T_{i+1} + A_w T_{i-1} + S) / A_p \quad (10)$$

O Método dos Volumes Finitos (MVF) também foi utilizado para obter a solução numérica. Existem duas maneiras de se obter as equações aproximadas via MVF. A primeira forma é a realização de balanços da propriedade em questão nos volumes elementares ou volumes finitos, e a segunda forma é, partindo-se da equação diferencial na forma conservativa integrá-la sobre o volume elementar, no espaço e no tempo (se o regime for transiente). Ambos processos são equivalentes ([4], [5]).

Usando a malha estruturada apresentada na Figura 4 o armazenamento via MVF será feita de forma diferenciada conforme apresentado na Figura 5.

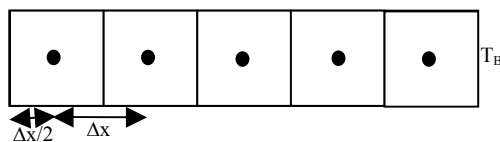


Figura 5: Malha usada em Volumes Finitos.

Usando o MVF deve-se observar na Figura 5 que a distância do ponto nodal central 1 a face oeste e do ponto nodal 5 até a face leste é a metade do espaçamento da malha. Assim, os volumes 1 e 5 terão coeficientes A_w e A_e respectivamente diferenciados, bem como o termo fonte será diferente dos pontos nodais internos na malha. São

estes dois volumes os responsáveis neste problema pelo transporte das condições de contorno para o interior do domínio. A discretização pelo MVF é apresentada a seguir para os pontos nodais internos ao domínio. Integrando a equação (7) no volume de controle P, detalhado na Figura 6, tem-se,

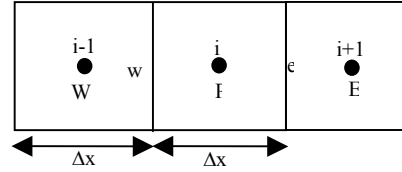


Figura 6: Detalhe de um volume interno, P.

$$\int_w^e \frac{d}{dx} \left(k \frac{dT}{dx} \right) = - \int_w^e q dx$$

$$k \frac{dT}{dx} \Big|_w = -q \Delta x$$

$$k \frac{dT}{dx} \Big|_e - k \frac{dT}{dx} \Big|_w = -q \Delta x$$

Usando a interpolação Diferença Central para obter os fluxos difusivos nas faces leste e oeste e considerando a condutividade térmica constante tem-se:

$$k \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta x} \right) - k \left(\frac{T_P - T_W}{\Delta x} \right) = -q \Delta x$$

Assim arrumando a equação os coeficientes ficam,

$$S_p = 0 \text{ (parte do termo fonte)}$$

$$S_u = q \cdot \Delta x \text{ (parte do termo fonte)}$$

$$A_e = k/\Delta x \text{ (coeficiente nodal na face leste)}$$

$$A_w = k/\Delta x \text{ (coeficiente nodal na face oeste)}$$

$$A_p = A_e + A_w - S_p \text{ (coeficiente nodal central)}$$

e a equação discreta fornecida pelo MVF para os volumes de controle onde $2 \leq i \leq n-1$, é:

$$T_i = (A_e T_{i+1} + A_w T_{i-1} + S_u) / A_p \quad (11)$$

Já para o volume de controle 1, apresentado na Figura 5, tem-se:

$$A_e = k/\Delta x$$

$$A_w = 0$$

$$S_p = -2k/\Delta x;$$

$$A_p = A_w + A_e - S_p$$

$$S_u = q \cdot \Delta x + 2kT_A/\Delta x$$

$$T_i = (A_e T_{i+1} + S_u) / A_p \quad (12)$$

Para o volume de controle 5, apresentado na Figura 5, tem-se:

$$A_e = 0$$

$$A_w = k/\Delta x$$

$$S_p = -2k/\Delta x;$$

$$\begin{aligned}
A_p &= A_w + A_e - S_p \\
S_u &= q \cdot \Delta x + 2kT_B/\Delta x \\
T_i &= (A_w T_{i-1} + S_u)/A_p
\end{aligned} \quad (13)$$

3.2 Condições de Contorno Simétricas

Utilizando as condições de contorno simétricas apresentadas na Figura 3b a solução analítica é:

$$T(x) = -\frac{q}{2k}(Lx - x^2) + T_a \quad (14)$$

A Figura 3c apresenta apenas a metade do domínio de cálculo da Figura 3b representando assim o mesmo problema de condução de calor. Nesta figura tem-se uma parede onde o plano mediano é adiabático, ou seja, não ocorre troca de calor nesta face. As condições de contorno são $\partial T/\partial x|_{x=0} = 0$ e $T(L) = T_a$ e a solução analítica será,

$$T(x) = \frac{q}{2k}(L^2 - x^2) + T_a \quad (15)$$

Doravante será apresentada a solução numérica tanto em diferenças finitas como em volumes finitos apenas para as condições de contorno da Figura 3c, conforme segue, para a malha numérica apresentada nas Figuras 4 e 5, respectivamente. Para o ponto nodal 2 da Figura 4, via MDF tem-se:

$$\begin{aligned}
A_e &= k/\Delta x \\
A_p &= A_e \\
S &= q \cdot \Delta x \\
A_w &= 0 \\
T_i &= (A_e T_{i+1} + S)/A_p
\end{aligned} \quad (16)$$

Para os demais pontos nodais exceto para 1 e n tem-se:

$$\begin{aligned}
A_e &= k/\Delta x \\
A_w &= k/\Delta x \\
A_p &= A_e + A_w \\
S &= q \cdot \Delta x \\
T_i &= (A_e T_{i+1} + A_w T_{i-1} + S)/A_p
\end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
T_1 &= T_2 \\
T_n &= T_a
\end{aligned}$$

Usando o MVF na Figura 5 tem-se para o volume de controle 1,

$$\begin{aligned}
A_e &= k/\Delta x \\
A_w &= 0 \\
S_p &= 0 \\
A_p &= A_w + A_e - S_p \\
S_u &= q \cdot \Delta x \\
T_i &= (A_e T_{i+1} + S_u)/A_p
\end{aligned} \quad (18)$$

Para o volume de controle 5 tem-se:

$$\begin{aligned}
A_e &= 0 \\
A_w &= k/\Delta x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_p &= -2k/\Delta x \\
A_p &= A_e + A_w - S_p \\
S_u &= q \Delta x + 2kT_a/\Delta x \\
T_i &= (A_w T_{i-1} + S_u)/A_p
\end{aligned} \quad (19)$$

Já para os demais volumes de controle tem-se:

$$\begin{aligned}
A_e &= k/\Delta x \\
A_w &= k/\Delta x \\
S_p &= 0 \\
S_u &= q \cdot \Delta x \\
A_p &= A_e + A_w - S_p \\
T_i &= (A_e T_{i+1} + A_w T_{i-1} + S_u)/A_p
\end{aligned} \quad (20)$$

3.3 Condições de Contorno de Convecção

Utilizando as condições de contorno: adiabática e de convecção, nas faces esquerda e direita, respectivamente, conforme ilustrado na Figura 3d, a solução analítica fica:

$$T(x) = -\frac{q}{2k}(L^2 - x^2) + \frac{qL}{h} + T_{inf} \quad (21)$$

Resolvendo a equação (7) para as condições de contorno apresentadas na Figura 3d tem-se através do MDF a seguinte solução para o ponto nodal 2,

$$\begin{aligned}
A_e &= k/\Delta x \\
A_w &= 0 \\
S_u &= q \cdot \Delta x \\
A_p &= A_e \\
T_i &= (A_e T_{i+1} + S)/A_p
\end{aligned} \quad (22)$$

O ponto nodal 6 será o responsável pela transferência de calor por convecção através do domínio, tendo:

$$\begin{aligned}
A_e &= 0 \\
A_w &= 1 \\
A_p &= 1 + h\Delta x/k \\
S &= h \cdot \Delta x \cdot T_{inf}/k \\
T_i &= (A_w T_{i-1} + S)/A_p
\end{aligned} \quad (23)$$

Para o ponto nodal 5 tem-se

$$\begin{aligned}
A_e &= 0 \\
A_w &= k/\Delta x \\
A_p &= A_w \\
S &= q \cdot \Delta x - h(T_n - T_{inf}) \\
T_i &= (A_e T_{i+1} + A_w T_{i-1} + S)/A_p
\end{aligned} \quad (24)$$

Para os demais pontos nodais tem-se:

$$\begin{aligned}
A_e &= k/\Delta x \\
A_w &= k/\Delta x \\
A_p &= A_e + A_w \\
S &= q \cdot \Delta x \\
T_i &= (A_e T_{i+1} + A_w T_{i-1} + S)/A_p
\end{aligned} \quad (25)$$

4. Placas Bidimensionais

O outro problema investigado no presente trabalho refere-se à condução de calor em placas bidimensionais. Primeiro fixou-se a temperatura em cada um dos quatro lados, conforme ilustrado na Figura 7.

Considerando regime permanente, placa uniforme (condutividade térmica constante), sem geração interna de energia, a equação (1) fica:

$$\frac{dT^2}{dx^2} + \frac{dT^2}{dy^2} = 0 \quad (26)$$

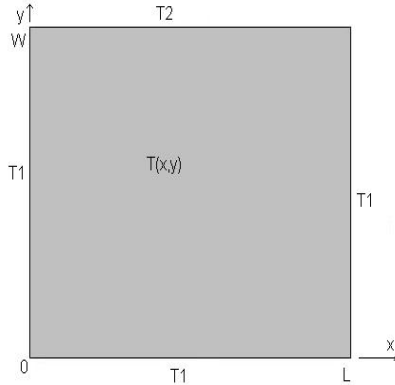


Figura 7: Placa bidimensional.

A solução analítica do problema ilustrado na Figura 7 é mais simples através da adimensionalização, $\theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}$. Assim, as condições de contorno são $\theta(0, y) = 0; \theta(L, y) = 0; \theta(x, y) = 0; \theta(x, w) = 1$ e a equação (26) se transforma com a adimensionalização na equação (27),

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d^2\theta}{dy^2} = 0 \quad (27)$$

Usando o método analítico da separação de variáveis, tem-se a solução parcial para as duas equações diferenciais ordinárias:

$$Y(y) = C_1 e^{\lambda y} + C_2 e^{-\lambda y} \quad (28)$$

$$X(x) = C_3 \cos(\lambda x) + C_4 \sin(\lambda x) \quad (29)$$

Aplicando as condições de contorno, nas equações (28) e (29) tem-se a solução analítica:

$$T(x, y) = (T_2 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{\sinh\left(\frac{n\pi W}{L}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sinh\left(\frac{n\pi y}{L}\right) + T_1$$

5. Resultados Analíticos e Numéricos

As soluções analíticas e numéricas obtidas são apresentadas nesta seção. A Fig. 8 mostra que a temperatura varia linearmente com x quando o problema de condução de calor unidimensional em regime permanente em uma parede plana sem geração de calor e com condutividade térmica constante é resolvido. Nota-se que para uma malha numérica pouco refinada, formada apenas por 6 pontos nodais (MDF) e 5 volumes de controle (MVF) a solução numérica é igual à solução analítica.

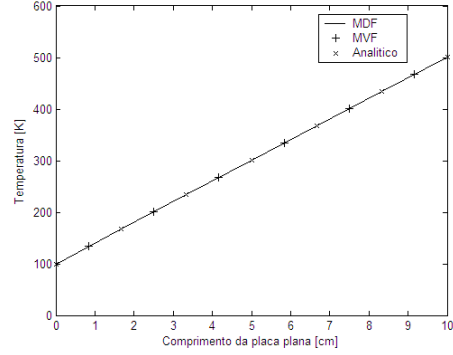


Figura 8: Distribuição de temperatura analítica e numérica em uma parede plana sem geração de calor.

Na Fig. 9 ilustra-se o comportamento da distribuição de temperatura em uma parede placa com geração uniforme de energia térmica por unidade de volume, $\dot{q} = 500 \text{ W/m}^3$, e as superfícies estão mantidas as temperaturas $T_A = 200 \text{ K}$ e $T_B = 100 \text{ K}$. Nota-se nesta figura que ao usar a parede plana de chumbo, onde a condutividade térmica é $35,3 \text{ W/m.K}$, a temperatura tem um acentuado aumento no interior da parede se comparado com uma parede de alumínio puro, onde a condutividade térmica é 237 W/m.K , isto ocorre porque a temperatura obtida é inversamente proporcional a condutividade térmica, conforme equação (10), assim como a condutividade térmica do chumbo é menor tem-se este comportamento.

A Fig. 10 apresenta a distribuição de temperatura para as mesmas condições da Fig. 9, exceto que nesta figura usou-se apenas 6 pontos nodais e 5 volumes de controle e a solução numérica é coincidente com a analítica. Nesta figura foi utilizada a condutividade térmica do alumínio.

A Fig. 11 ilustra a distribuição de temperatura em uma parede plana com geração uniforme de calor e com superfície adiabática no plano intermediário, conforme apresentado na Fig. (3c). A temperatura na face direita é fixada em 100 K . Nota-se que a solução numérica acompanhou o resultado obtido pela solução analítica.

A Figura 12 apresenta o perfil de temperatura analítico e numérico usando como condições de contorno $q = 50 \text{ W/m}^2$, $h = 1000 \text{ W/m}^2\text{K}$ e $T_{\infty} = 300 \text{ K}$. Percebe-se nesta figura que há um aumento da temperatura interna da parede devido a energia térmica no interior de toda a placa, observa-se também que com o plano adiabático o perfil de temperatura forma um ângulo reto, característica desta condição de contorno. Na Figura 13 foi explorado o efeito do coeficiente de transferência de calor por convecção, h , na distribuição de temperatura, usou-se $h = 200$ e $1000 \text{ W/m}^2\text{K}$ que são valores representativos para o resfriamento com ar e com um líquido, respectivamente [1]. Nota-se na figura que com $h = 200 \text{ W/m}^2\text{K}$ existe um aumento significativo na temperatura ao longo de toda a parede plana, o que ocorre devido a temperatura ser inversamente proporcional a este coeficiente. A Figura 14 apresenta as isothermas para a placa bidimensional da Figura 7.

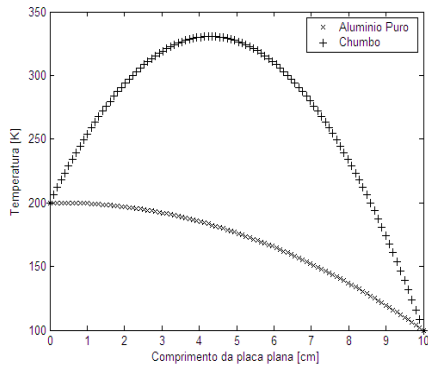


Figura 9: Distribuição de temperatura em uma parede plana com geração de calor e condições de contorno assimétricas.

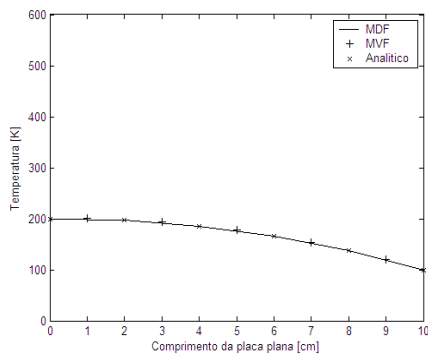


Figura 10: Distribuição de temperatura analítica e numérica em uma parede plana com geração de calor e condições de contorno assimétricas.

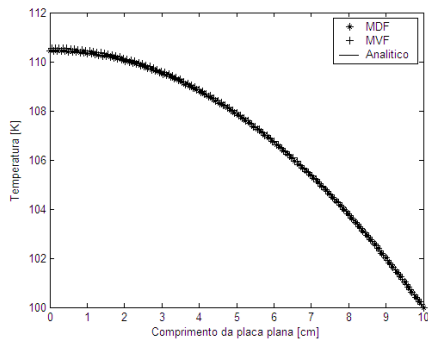


Figura 11: Distribuição de temperatura analítica e numérica em uma parede plana com geração de calor e condições de contorno simétricas.

6. Conclusões

Neste trabalho investigamos problemas envolvendo transferência de calor através da condução. Notou-se que na presença de um gradiente de temperatura, a transferência de energia por condução, ocorre no sentido da diminuição de temperatura, além da propriedade do material influenciar significativamente na transferência de energia. As equações foram resolvidas numericamente e analiticamente obtendo bom desempenho em todos os problemas investigados. Como seqüência a este trabalho, propomos resolver numericamente e analiticamente, quando possível,

problemas de difusão de massa, onde o processo é semelhante a transferência de calor por condução e investigar novas abordagens do MDF e MVF.

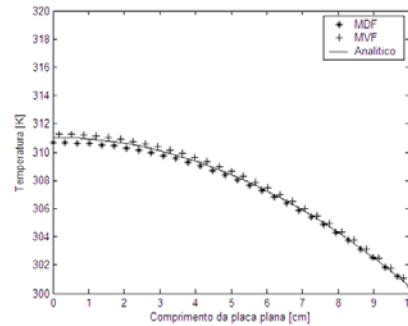


Figura 12: Distribuição de temperatura em uma parede plana com geração de calor e condições de contorno: adiabáticas e com convecção.

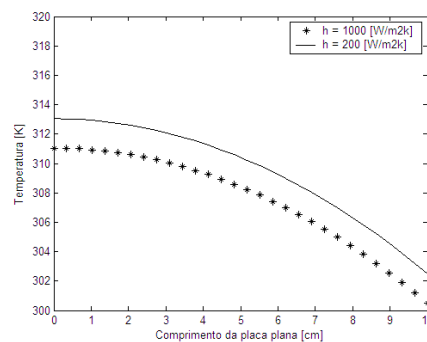


Figura 13: Distribuição de temperatura variando h.

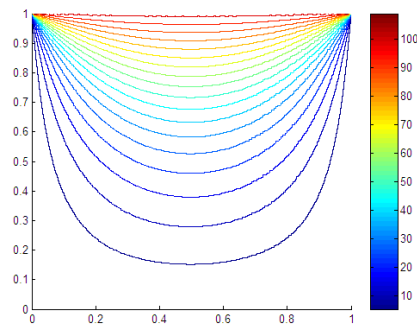


Figura 14: Isotermas na condução de calor em uma placa bidimensional.

Referências

- [1] F. P. Incropera, D. P. DeWitt, "Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa", LTC, Rio de Janeiro, 1998.
- [2] G. D. Smith, "Numerical Solution of Partial Differential Equations – Finite Difference Methods", 3ª ed., Oxford, 2003.
- [3] J. H. Ferziger, M. Peric, "Computational Methods for Fluid Dynamics", 3ª ed., Springer, 2002.
- [4] C. R. Maliska, "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, LTC, Rio de Janeiro, 2005.
- [5] H. K. Versteeg, W. Malalasekera, "An Introduction to Computational Fluid Dynamics", Longman Scientific & Technical, 1995.