

TORQUE MAGNÉTICO INDUZIDO COM MODELO DE QUADRIPOLO DO CAMPO MAGNÉTICO DA TERRA

Fernanda Almeida Toledo – Lucirene Vitória Góes – Maria Cecília Zanardi

Grupo de Dinâmica Orbital e Planetologia - UNESP - Guaratinguetá

Objetivo

Determinar as componentes médias do torque magnético induzido para um satélite artificial estabilizado por rotação em órbita circular, através da média em um período orbital, utilizando o modelo de quadrupolo associado ao campo magnético da Terra, considerando expansões até primeira ordem na excentricidade.

Introdução

Os torques ambientais que mais afetam a atitude são o Torque de Gradiente de Gravidade, o Torque de Pressão de Radiação Solar Direta, o Torque Aerodinâmico e o *Torque Magnético*.

As principais fontes causadoras do torque magnético são o momento magnético do satélite, as correntes de Foucault e a histerese. Este trabalho está relacionado com o modelo do torque magnético devido as correntes de Foucault aplicado à satélites estabilizados por rotação, ou seja, a direção da velocidade de rotação do satélite coincide com o eixo de maior momento principal de inércia. O torque induzido ocorre devido ao movimento de rotação do satélite e às correntes induzidas de Foucault que circulam pelas superfícies metálicas do satélite causando um decaimento de perfil exponencial da velocidade de rotação.

Sistemas de Referência

Para descrever o movimento rotacional do satélite estabilizado por rotação, é utilizado um sistema de coordenadas esféricas, fixo no satélite, que posiciona o eixo de rotação do satélite em relação ao sistema equatorial terrestre. Considera-se que a órbita do satélite em redor da Terra é conhecida.

As componentes do torque induzido no sistema do satélite são determinadas através de matrizes de rotação, que relacionam os diversos sistemas de referência envolvidos e dependem dos elementos orbitais, da ascensão reta (α) e declinação (δ) do eixo de rotação, do parâmetro de Foucault (p) do satélite e dos coeficientes gaussianos do campo geomagnético. Na Figura 1 estão apresentados o sistema Equatorial OXYZ (O) e o sistema do Satélite Oxyz, no qual o eixo coincide com o eixo de rotação do satélite. O sistema do satélite é obtido a partir do sistema Equatorial através da rotação de ($270^\circ - \alpha$) no eixo OZ e da rotação de ($90^\circ - \delta$) no eixo Ox, de modo que a matriz de rotação que relaciona os dois sistemas é dada por:

Assim:

$$R_1 = \begin{pmatrix} -\sin \delta & \cos \delta & 0 \\ -\sin \delta \cos \alpha & -\sin \delta \sin \alpha & \cos \delta \\ \cos \delta \cos \alpha & \cos \delta \sin \alpha & \sin \delta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{pmatrix} = R_1 \begin{pmatrix} \hat{I} \\ \hat{J} \\ \hat{K} \end{pmatrix} \quad (1)$$

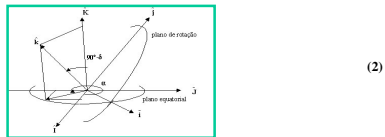


Figura 1 – Orientação do eixo de rotação \hat{k} , Sistema Equatorial $(\hat{I}, \hat{J}, \hat{K})$ Sistema do Satélite $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$

Campo Magnético da Terra

O campo geomagnético terrestre pode ser expressado como o gradiente de um potencial escalar V , como mostrado abaixo (WERTZ,1978):

$$\vec{B} = -\nabla V \quad (3)$$

O potencial é representado por harmônicos esféricos (Wertz,1978):

$$V(r, \phi, \theta) = r \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{r_0}{r} \right)^{n+1} \sum_{l=0}^n \beta_{nl}^m \cos m\theta + h^n \sin m\theta P_n^m(\phi) \quad (4)$$

sendo r a distância geocêntrica, r_0 o raio equatorial da Terra, ϕ a co- latitude local, θ a longitude local, β_{nl}^m , h^n os coeficientes Gaussianos e P_n^m os Polinômios associados de Legendre.

Substituindo o potencial V dado em \vec{B} e evoluindo os cálculos, obtém-se para o modelo do quadrupolo:

$$B_x = 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 f_1(\theta, \phi) + 3 \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 f_2(\theta, \phi) \quad B_\theta = - \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 f_3(\theta, \phi) - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 f_4(\theta, \phi) \quad B_\phi = - \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 f_5(\theta, \phi) + \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 f_6(\theta, \phi) + 2 \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 f_7(\theta, \phi)$$

$$f_1(\theta, \phi) = [-3g_2^0 \cos \phi \sin \theta + [g_2^1 \cos(\theta) + h_2^1 \sin(\theta)] \sqrt{3} \cos 2\phi + [g_2^2 \cos(\theta) + h_2^2 \sin(\theta)] \sqrt{5} \cos 2\phi + [g_2^3 \cos(\theta) + h_2^3 \sin(\theta)] \sqrt{7} \cos 2\phi] \cos(\phi)$$

$$f_2(\theta, \phi) = [1,5g_2^0 (\cos^2(\theta) - \frac{1}{3}) + [g_2^1 \cos(\theta) + h_2^1 \sin(\theta)] \sqrt{3} \cos \phi \sin \theta + [g_2^2 \cos(\theta) + h_2^2 \sin(\theta)] \sqrt{5} \cos \phi \sin \theta + \sqrt{7} [g_2^3 \cos 2\theta + h_2^3 \sin 2\theta] \sin^2(\theta)] \cos(\phi)$$

$$f_3(\theta, \phi) = [g_2^0 \sin \theta + [g_2^1 \cos(\theta) + h_2^1 \sin(\theta)] \cos \phi]$$

$$f_4(\theta, \phi) = [-3g_2^0 \cos \phi \sin \theta + [g_2^1 \cos(\theta) + h_2^1 \sin(\theta)] \sqrt{3} \cos 2\phi + [g_2^2 \cos(\theta) + h_2^2 \sin(\theta)] \sqrt{5} \cos 2\phi + [g_2^3 \cos(\theta) + h_2^3 \sin(\theta)] \sqrt{7} \cos 2\phi] \sin(\theta)$$

$$f_5(\theta, \phi) = [g_2^1 \sin(\theta) + h_2^1 \cos(\theta)] \cos(\phi)$$

$$f_6(\theta, \phi) = [g_2^2 \sin(\theta) + h_2^2 \cos(\theta)] \sqrt{3} \cos \phi \sin \theta$$

$$f_7(\theta, \phi) = [-g_2^3 \sqrt{3} \cos 2\theta + \sqrt{3} h_2^3 \sin 2\theta] \sin^2 \theta \quad (6)$$

Campo Magnético no Sistema Equatorial e Sistema do Satélite

No Sistema Equatorial, as componentes do campo geomagnético são dadas por Wertz (1978) :

$$B_X = (B_r \cos \delta + B_\theta \sin \delta) \cos \alpha - B_\phi \sin \alpha \quad (7)$$

$$B_Y = (B_r \cos \delta + B_\theta \sin \delta) \sin \alpha + B_\phi \cos \alpha \quad (8)$$

$$B_Z = B_r \sin \delta - B_\theta \cos \delta \quad (9)$$

em que α é ascensão reta do vetor posição e δ é a declinação do vetor posição.

Utilizando a matriz de rotação entre o sistema Equatorial e o sistema do satélite, dada por (1), as componentes do campo geomagnético no sistema do satélite são dadas por (Zanardi et al., 2004) :

$$B_x = -B_X \cos \alpha + B_Y \cos \alpha \quad (10)$$

$$B_y = (-B_X \sin \alpha - B_Y \sin \alpha) \sin \delta + B_Z \cos \delta \quad (11)$$

$$B_z = (B_X \cos \alpha + B_Y \sin \alpha) \cos \delta + B_Z \sin \delta \quad (12)$$

Torque Magnético Induzido

Considerando um satélite estabilizado por rotação, a velocidade de rotação é representada por:

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k} \quad (13)$$

O torque induzido é dado por: (Wertz, 1978):

$$\vec{N}_i = p \vec{B} \times (\vec{B} \times \vec{\omega}) \quad (14)$$

com p sendo o parâmetro de Foucault, que depende da geometria do satélite e da condutividade do material.

Sejam o torque magnético devido às correntes de Foucault e o campo geomagnético expressos no sistema do satélite por:

$$\vec{N}_i = N_x \hat{i} + N_y \hat{j} + N_z \hat{k} \quad (15)$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k} \quad (16)$$

Desenvolvendo o duplo produto vetorial em (14), tem-se:

$$N_x = -p B_x B_z \omega \quad N_y = -p B_y B_z \omega \quad N_z = p((B_x)^2 + (B_y)^2) \omega \quad (17)$$

Substituindo B_x , B_y e B_z nas equações acima, depois de algumas transformações trigonométricas, tem-se

$$N_x = p \frac{\omega}{2} [\sin 2\alpha \cos \delta (B_X)^2 - \sin 2\alpha \cos \delta (B_Y)^2 - 2 \cos 2\alpha \cos \delta (B_X B_Y) + 2 \sin \alpha \sin \delta (B_X B_Z) - 2 \sin \delta \cos \alpha (B_Y B_Z)]$$

$$N_y = p \frac{\omega}{2} [\sin 2\delta \cos^2 \alpha (B_X)^2 + \sin 2\delta \sin^2 \alpha (B_Y)^2 - \sin 2\delta \cos 2\alpha (B_X B_Y) - 2 \cos 2\delta \sin \alpha (B_Y B_Z)]$$

$$N_z = p \omega [\sin^2 \delta \cos^2 \alpha (B_X)^2 + \sin^2 \delta \cos^2 \alpha (B_Y)^2 + \cos^2 \delta (B_Z)^2 + \sin 2\alpha \sin^2 \delta (B_X B_Y) - \sin 2\delta \cos \alpha (B_X B_Z) - \sin 2\delta \sin \alpha (B_Y B_Z)] \quad (18)$$

Depois de diversas substituições, as componentes do torque induzido são expressas em termos de α , δ , ϕ e θ em função dos elementos orbitais (a, I, \dot{W}) . Estas relações são determinadas através das relações existentes entre as variáveis envolvidas, obtidas com a utilização de propriedades de trigonometria esférica e matrizes de rotação. Por exemplo:

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos \Omega \cos W - \sin \Omega \sin W \cos I$$

$$\cos \delta \sin \alpha = \sin \Omega \cos W + \cos \Omega \sin W \cos I$$

$$\sin \delta = \sin W \sin I$$

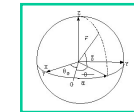


Figura2: Sistema Equatorial ascensão reta α , declinação δ , longitude local (θ) e ascensão reta de Greenwich (ω).

As componentes N_x , N_y , N_z estão expressas em termos da ascensão reta (α) e declinação (δ) do eixo de rotação e dos elementos orbitais (a, Ω, \dot{W}) em cada instante. O torque induzido médio é computado integrando estas parcelas para um período orbital, em termos do ângulo ω . Estas expressões estão apresentadas em Toledo (2005).

Conclusão

A determinação de uma solução analítica para o sistema de equações, que descreve o movimento rotacional do satélite, pode incluir apenas as componentes médias do torque induzido, de modo similar ao realizado por Assis (2004). No cálculo das componentes médias do torque induzido, as parcelas do torque instantâneo N_x , N_y , N_z , dadas em (18) foram integradas em um período orbital. Deste modo, os resultados deste trabalho poderão ser incluídos nas equações do movimento rotacional de satélites estabilizados por rotação, de forma a determinar as influências deste torque no módulo da velocidade de rotação do satélite, ascensão reta e declinação do eixo de rotação. Como a componentes do torque no eixo de maior momento principal de inércia Oz não é nula, o torque induzido causa o decaimento exponencial do módulo da velocidade de rotação e a deriva e a precessão do eixo de rotação.

Referências Bibliográficas

ASSIS, S. C.; *Propagação da Atitude de Satélites Artificiais Estabilizados por Rotação: Torque Magnético Residual com Modelo de Quadrupolo para o campo Geomagnético*, Dissertação de Mestrado, FEG/UNESP, 2004.

FRANÇA, L.V.G; *Torque Induzido com parcelas f_2, f_3, f_4 do modelo de quadrupolo do campo geomagnético*, Relatório Final do PIBIC 2004/2005, FEG/UNESP, 2005.

TOLEDO, F. A ; *Torque Induzido com parcelas f_2, f_3, f_4 do modelo de quadrupolo do campo geomagnético*, Relatório Final do PIBIC 2004/2005, FEG/UNESP, 2005.

WERTZ, J. R. *Spacecraft Attitude Determination and Control*, Kluwer Academic Publishers, 1978.

ZANARDI, M. C.; ASSIS, S. C., Kuga, H. K.; *Torque Magnético Residual Médio com Modelo de Quadrupolo*, Anais do 3º Congresso Temático de Dinâmica e Controle, 1841-1851, 200.