Fórmulas de Quadratura Associadas aos Polinômios L-ortogonais

Thiago Monteiro Marques Garcia e Eliana Xavier Linhares de Andrade

aluno de graduação (garouchan@ig.com.br) Orientadora (eliana@ibilce.unesp.br)

Departamento de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP, Campus de São José do Rio Preto†

$\psi(t)$ - real, limitada, não decrescente e com infinitos pontos de acumulação em (a,b)

Momentos: $\mu_m = \int_a^b t^m d\psi(t)$, $\quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, se os momentos existem
para $m = 0, 1, ... \quad \Rightarrow d\psi(t)$ - distribuição
para $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow d\psi(t)$ - distribuição forte
para $m \in \mathbb{Z}$ e $(a,b) \subset (0,\infty) \Rightarrow d\psi(t)$ - distribuição forte de Stieltjes
Se $d\psi(t) = w(t)dt \Rightarrow w(t)$ - função peso

Polinômios Ortogonais: $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ - SPO em (a,b) com relação a $w(x)$
$P_n(x)$ é de grau exatamente n;

$$< P_n, P_m > = \int_a^b P_n(x)P_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0, & se\ n \neq m, \\ \rho_n \neq 0, & se\ n = m. \end{cases}$$

Polinômios Similares aos Ortogonais: $\{B_n(t)\}$ em (a,b) com relação à distribuição forte de Stieltjes $d\psi(t)$.
$B_n(t)$ é de grau exatamente n;

$$\int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\psi(t) = \begin{cases} 0, & se\ s = 0, 1, ..., n-1 \\ p_n > 0, & se\ s = n. \end{cases}$$

Propriedades dos Polinômios Similares aos Ortogonais:

1º Relação de Recorrência de Três Termos

$$B_{n+1}(t) = (t - \beta_{n+1})B_n(t) - \alpha_{n+1} t B_{n-1}(t), \quad n \geq 1,$$

com

$$B_0(t) = 1, \quad B_1(t) = t - \beta_1,$$

e

$$\beta_1 = \frac{\mu_0}{\mu_{-1}}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\rho_n}{\rho_{n-1}}.$$

Observe que $\beta_n > 0$ e $\alpha_{n+1} > 0$ para $n \geq 1$.

2º Os zeros do polinômios similar são reais, distintos e pertencem ao intervalo (a,b).

3º Entre dois zeros consecutivos do Polinômio $B_{n-1}(t)$ existe um zero de $B_n(t)$.

Aplicação da Fórmula de Quadratura Associadas aos Polinômios Similares:
Consideremos a classe de integrais

$$I = \int_{-1}^{1} f(u)g(u) \ \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \ du$$

onde f(u) e g(u) são funções contínuas no intervalo$[-1,1]$. Suponhamos que a função f(u) tem singularidade isolada no ponto $-\lambda$ onde $|\lambda| > 1$

Para aproximar essa classe de integrais, uma escolha adequada seria a fórmula de quadratura de Gauss-Tchebychev. Como f(u) e g(u) não possuem singularidades no intervalo $[-1,1]$, podemos esperar boa convergência através dessa regra. Entretanto, quando a singularidade de f(u) está bem proxima do intervalo, isto é, quando$|\lambda|$ está perto de 1, a regra de Gauss-Tchebychev apresenta comportamento de convergência altamente insatisfações.

Vejamos, agora, a aplicação da fórmula de quadratura associadas aos polinômios similares que nas condições acima, apresenta ótimo desempenho.

A quadratura em consideração é a seguinte:

$$\int_a^b F(t) \ \frac{1}{\sqrt{b-t}\ \sqrt{t-a}} \ dt = \frac{2\pi}{n} \sum_{r=1}^{n} \ (1 + \beta/z_r^{(n)})^{-1} \ F(z_r^{(n)}) \ + \ E_n(F)$$

onde $0 < a < b < \infty$, $\alpha = (\sqrt{b} - \sqrt{a})^2/4$, $\beta = \sqrt{ab}$,

$$z_{n+1-m}^{(n)} = (\beta + \alpha v_m^{(n)}) + \sqrt{(\beta + \alpha v_m^{(n)})^2 - \beta^2}, \quad z_m^{(n)} = \beta^2 / z_{n+1-m}^{(n)} \quad e$$

$$v_m^{(n)} = 1 + \cos((2m-1)\pi/n), \quad para\ m = 1,\ 2, ...,\ [(n+1)/2].$$

essa regra satisfaz $E_n(F) = 0$, sempre que $t^n F(t) \in P_{2n-1}$.

Como a transformação linear dada a seguir, alteramos a integral $I = \int_{-1}^{1} f(u)g(u) \ \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \ du$ de modo a podermos aplicar a regra de quadratura acima.

Sejam a e b dois números positivos tais que $b/a = (|\lambda| + 1)(|\lambda| - 1)$. Então, se

$$u = u(t) = \frac{\lambda}{|\lambda|} \ \frac{2t - b - a}{b - a},$$

obtemos

$$I = \int_a^b f(u(t)) \ \ g(u(t)) \ \ \frac{1}{\sqrt{b-t}\ \sqrt{a-t}} \ \ dt.$$

É fácil ver que quando $t = 0$ temos $u = -\lambda$. Logo, a singularidade de F(u) no ponto $u = -\lambda$ está, agora, localizada no ponto t=0. Podemos observar, pois $E_n(F) = 0$, sempre que $t^n F(t) \in P_{2n-1}$, que nossa formula de quadratura pode funcionar bem, mesmo que a singularidade no ponto $t = 0$ seja de ordem até n

Como Exemplo especial dessa classe de integrais, seja

$$I_{ex} = \int_{-1}^{1} \ \frac{g(u)}{(u+\lambda)^r} \ \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \ du$$

onde g(u) é uma função continua em $[-1,1]$ e também nas vizinhanças dos pontos 1 e -1

Aplicando a transformação linear à integral I_{ex}, obtemos

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} \ \ I_{ex} = \left(\frac{b-a}{2}\right)^r \int_a^b g\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\frac{2t}{b-a} - |\lambda|\right) \frac{1}{t^r} \frac{1}{\sqrt{b-t}\ \ \sqrt{t-a}} dt.$$

tomemos $b = |\lambda| + 1$ e $a = |\lambda| - 1$. Logo, $b - a = 2$ e portanto

$$\frac{\lambda}{|\lambda|} \ \ I_{ex} = \int_a^b g\left(\frac{\lambda t}{|\lambda|} - |\lambda|\right) \frac{1}{t^r} \frac{1}{\sqrt{b-t}\ \ \sqrt{t-a}} dt.$$

Estamos, agora, em condições de aplicar nossa regra de quadratura a essa integral. Quando $g(t) = exp(t)$.

r=1 $\lambda = 1.1$	valor exato: 4.3988982029 (para 11 algarismo significativos)	
Nº Pontos n	Tchebychev	Nova Regra
2	3.7342041050	4.2906260754
5	4.3454615803	4.3988623516
10	4.3982577305	4.3988982029
15	4.3988906142	4.3988982029
20	4.3988981130	4.3988982029
25	4.3988982019	4.3988982029
30	4.3988982029	4.3988982029

r=1 $\lambda = 1.01$	valor exato: 10.263987847 (para 11 algarismo significativos)	
Nº Pontos n	Tchebychev	Nova Regra
2	4.412345645	10.089808549
5	7.104198673	10.263854495
10	9.361172196	10.263987847
15	10034529940	10.263987847
20	10.207529933	10.263987847
30	10.260631961	10.263987847
40	10.263788989	10.263987847
50	10.263976065	10.263987847
60	10.263987149	10.263987847