

# Estabilidade do Métodos (K,L) de Brown

Vanessa Avansini Botta, Messias Meneguette Jr.

UNESP – Universidade Estadual Paulista

Faculdade de Ciências e Tecnologia – Campus de Presidente Prudente – SP

Departamento de Matemática, Estatística e Computação

e-mail: {botta,messias}@prudente.unesp.br

Os métodos (K,L) de Brown para equações diferenciais ordinárias representam uma classe de métodos multiderivativos de passo múltiplo dados por

$$\sum_{i=0}^K \alpha_i y_{n+i} = \sum_{j=0}^L h^j \beta_j f_{n+K}^{(j-1)}$$

onde as constantes  $\alpha_i$  e  $\beta_j$  são números reais que tornam o método mais preciso e  $K$  é a quantidade de passos.

O primeiro polinômio característico destes métodos é dado por

$$\rho(z) = \sum_{i=0}^K \alpha_i z^i.$$

**Definição:** O método numérico é zero-estável quando as raízes do polinômio característico relacionado ao método encontram-se no disco unitário e as raízes de módulo um são simples.

Existe uma subclasse dos métodos (K,L) de Brown cujos coeficientes satisfazem as seguintes desigualdades

$$0 < |\alpha_0| \leq |\alpha_1| \leq \dots \leq |\alpha_{K-1}|.$$

Será analisada aqui a estabilidade desta subclasse dos métodos (K,L) de Brown.

**Conjectura:** Sejam  $P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_K z^K$  um polinômio tal que  $0 < |\alpha_0| \leq |\alpha_1| \leq \dots \leq |\alpha_{K-1}|$  e  $|\alpha_{K-1}| > |\alpha_K|$

cujas raízes encontram-se no disco unitário e  $P'(z)$  com os coeficientes ordenados. Então, as raízes do polinômio

$$P_\gamma(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_{K-1} z^{K-1} + (\alpha_K + \gamma) z^K$$

Encontram-se no disco unitário, para todo  $\gamma$  positivo.

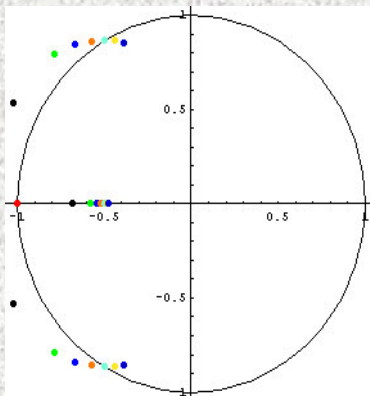
Através desta conjectura, muitos problemas sobre estabilidade dos métodos (K,L) de Brown podem ser resolvidos. Portanto, o objetivo deste trabalho é analisar esta conjectura.

Um polinômio que motivou a construção desta conjectura foi

$$P(z) = 1 + 3z + 3z^2 + z^3$$

cujas raízes estão sobre o disco unitário. Através da figura a seguir, é possível observar que as raízes de  $P(z)$  entram novamente no disco unitário quando os coeficientes de  $P'(z)$  estão ordenados, isto é, quando

$$P'(z) = 1 + 3z + 3z^2 + 2z^3.$$



**Teorema1 (Eneström-Kakeya):** Seja o polinômio

$$P(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_K z^K$$

cujos coeficientes satisfazem as desigualdades

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{K-1} < \alpha_K.$$

Então, as raízes de  $P(z)$  encontram-se no disco unitário.

**Teorema 2:** Sejam  $P(z)$  como no teorema acima, onde os coeficientes são positivos,

$$\beta_1 = \min_{0 \leq j < K} \left\{ \frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}} \right\} \text{ e } \beta_2 = \max_{0 \leq j < K} \left\{ \frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}} \right\}.$$

Então, todos os zeros de  $P(z)$  encontram-se no anel  $\beta_1 \leq |z| \leq \beta_2$ .

Quando  $\gamma > \alpha_{K-1} - \alpha_K$ , segue que os coeficientes de  $P_\gamma(z)$  estão ordenados e assim, pelo teorema de Eneström-Kakeya, as raízes de  $P_\gamma(z)$  encontram-se no disco unitário.

Resta então analisar o caso em que  $0 < \gamma < \alpha_{K-1} - \alpha_K$ .

Através do Teorema 2, é possível encontrar um limitante para as raízes, que é

$$|z| < 1 + \frac{1}{K-1}, K > 1.$$

Outro fato que foi possível mostrar é que quando as raízes de  $P_\gamma(z)$  são reais, elas encontram-se no disco unitário.

De fato, considerando  $P_\gamma(-1) \neq 0$  e supondo que exista pelo menos uma raiz real fora do disco unitário, tem-se: se  $K$  é par então  $P_\gamma(-1) < 0$  e  $P(-1) \geq 0$ .

Mas  $P_\gamma(-1) = \gamma + P(-1) > 0$ , onde chegamos a uma contradição; se  $K$  é ímpar tem-se  $P_\gamma(-1) > 0$  e  $P(-1) \leq 0$ .

Mas  $P_\gamma(-1) = P(-1) - \gamma < 0$ , onde chegamos a uma contradição.

Portanto, em ambos os casos, as raízes reais de  $P_\gamma(z)$  encontram-se no disco unitário.

Além disso, considerando  $r$  a menor raiz real de  $P(z)$ , à medida que  $\gamma$  aumenta, as raízes reais de  $P_\gamma(z)$  encontram-se à direita de  $r$  e vão se aproximando da origem.

Será analisado este comportamento das raízes para dois casos:  $K$  par e  $K$  ímpar. Para  $K$  par, temos  $P_\gamma(r) = \gamma r^K > 0$ .

Logo,  $P_\gamma(r) > P(r)$ .

Também não há mudança de sinal de  $P_\gamma(z)$  em  $(-\infty, u]$  onde  $u < r$ . Então, as raízes reais de  $P_\gamma(z)$  encontram-se à direita de  $r$ .

Esta mesma análise pode ser feita para o caso em que  $K$  é ímpar.

A próxima etapa deste trabalho será analisar o comportamento dos zeros complexos de  $P_\gamma(z)$ .

## Bibliografia

Lambert, J. D. Computational Methods in Ordinary Differential Equations. John Wiley & Sons, London 1973.

Marden, M. Geometry of Polynomials. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1966.

Meneguette Jr., M. Multistep Multiderivative Methods and Related Topics. Tese de Doutorado. Linacre College, Oxford, 1987.