Solução Numérica para uma Equação Diferencial Parcial com Memória na Fronteira via Método Diferenças Finitas

Antenor Noronha Silva & Reiville dos Santos Rêgo
Programa de Pós-graduação em Matemática e Estatística, Belém, UFPA.
E-mail: antenor_ns@yahoo.com.br, reiville@ufpa.br,

Marcus Pinto da Costa da Rocha
UFPA – Universidade Federal do Pará
FEAPA – Faculdade de Estudos Avançados do Pará
Belém, PA
E-mail: mrocha@ufpa.br.

O principal objetivo deste trabalho é estudar a solução numérica da equação de onda com memória na fronteira, para o seguinte problema:

$$u_{tt}(x,t) - \alpha^2 u_{xx}(x,t) = 0 \quad (1)$$

$$u(0,t) = 0$$

$$u(1,t) + \int_0^t g(t-s) u_{xx}(1,s)\,ds = 0 \quad \forall \; t > 0 \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x),\; u_t(x,0) = u_1(x) \text{, em } (0,1) \quad (3)$$

Consideramos ainda os seguintes espaços:

$$V = \{u \in H^2(0,1) : u(0,t) = 0, \forall t > 0\}$$

$$u_0 \in H^2(0,1) \cap V$$

$$u_1 \in V$$

A integral em (2) é uma condição na fronteira que inclui o efeito memória. Denotamos por u o deslocamento e por g a função relaxação. Estudamos também a existência, regularidade e unicidade de soluções forte para o problema (1) - (3). Para mostrar a existência usamos o método de Galerkin e a unicidade o método da energia.

Para a aproximação numérica, utilizando diferenças finitas, a equação (1) é reescrita, da seguinte forma.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4)$$

Para ilustrar os resultados obtidos selecionamos a equação de onda com os seguintes parâmetros: h= 0.1, k=0,05. A função g(t) é uma função exponencial, e u(t) uma função seno. A figura 1 ilustra os resultados obtidos para a solução numérica da equação de onda com memória demonstrando o decaimento quando é introduzido o termo viscoelástico na fronteira.

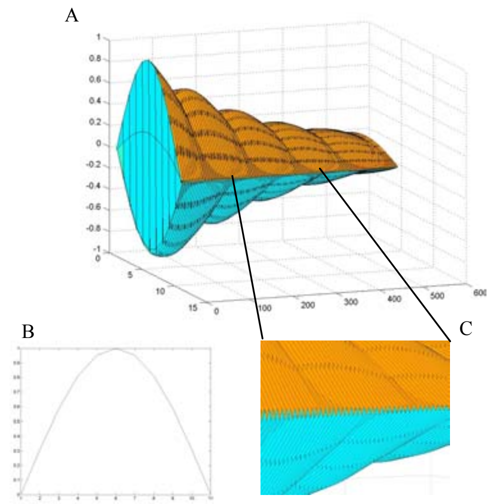

Figura 1: (a) Solução numérica da equação de onda com memória. (b) Função seno u(t). (c) Demonstração da condição na fronteira que inclui o efeito memória.

Conclusões

Analisando os resultados obtidos e selecionados para apresentação, concluímos que a solução numérica proposta apresenta bons resultados, faltando definir a condição de estabilidade. E a solução se torna mais próxima da ideal quando mais o decaimento da função exponencial aumenta.

Referências

[l] L. Mauro, Asymptotic behavior of solution to wave equation with a memory condition at the boundary, Electronic Journal of Differential Equation. 73(2001) 1-11.

[2] Burden, Richard L & Faries. J. Douglas. Numerical Analysis. Thomson Learning, 2003

[3] Cunha, Maria C. C. Métodos Numéricos. Editora UNICAMP