Solução Numérica para uma equação diferencial Parcial com Memória na fronteira via Diferenças Finitas

Luiz Antônio Neto de Oliveira* **Antenor Noronha Silva**

Alunos do Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística,
PPGME/UFPA,
E-mail: luize.m@bol.com.br, antenor_ns@yahoo.com.br

Marcus Pinto da Costa da Rocha
UFPA – Universidade Federal do Pará
FEAPA - Faculdade de Estudos Avançados do Pará
Belém, PA
E-mail: mrocha@ufpa.br.

Existência e unicidade do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)+u_{xxxx}(x,t)-u_{xx}(x,t)=0, \\ (x,t)\in(0,L)\times(0,\infty) \quad (1.1) \\ u(0,t)=u_x(0,t)=0, \quad t\in(0,\infty) \quad (1.2) \\ u_x(L,t)+\int_0^t g_1(t-s)\{u_{xx}(L,s)+p_1u_x(L,s)\}ds=0, \\ t\in(0,\infty) \quad (1.3) \\ u(L,t)+\int_0^t g_2(t-s)\{u_{xxx}(L,s)-u_x(L,s)-p_2u(L,s)\}ds=0, \\ t\in(0,\infty) \quad (1.4) \\ u(x,0)=u_0(x);\, u_t(x,0)=u_1(x), \quad x\in(0,L). \quad (1.5) \end{cases}$$

Uma aplicação prática desta equação seria a de uma lâmina flexível que a partir de seu estado original sofre uma perturbação causada por uma força aplicada temporariamente, passando a se deslocar verticalmente; com uma das pontas presa e a outra oscilando livremente, mas em contato com um meio viscoso, acontece o fenômeno chamado efeito memória, ou seja, esta ponta vai perdendo movimento oscilatório tendendo ao estado original, antes de ter sofrido a perturbação.

Para o estudo de existência e unicidade do problema acima, vamos utilizar o método das soluções aproximadas de Faedo-Galerkin.

Com o uso do teorema de Carathéodory, obtemos solução local no intervalo $[0,t_m]$.

Com o uso das desigualdades de Young, Poincaré e Gronwall, a energia do sistema pode ser estimada, e com alguns cálculos mais complicados conseguimos outras estimativas, que combinados com o lema de Aubin – Lions obtemos a existência global da solução.

Para provarmos a unicidade de solução , usamos o método da energia introduzido por Lions, aclopado com a desigualdade de Gronwall e as hipóteses sobre as funções p_1 e p_2.

Referências

[1] R. Courant, Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc.,* 49 (1943) 1-23.

[2] W. Gautschi, A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae, em "E.B. Christoffel -The influence of his work in mathematics and physical sciences" (P.L. Butzer e F. Fehér, eds.) pp. 72-147, Birkhãuser Verlag, Basel, 1981.

[3] N.J. Higham, "Handbook of Writing for the Mathematical Sciences", SIAM, Philadelphia, 1993.