# Um estudo numérico sobre a estabilidade dos métodos BDF


**Fernando Pacanelli Martins**
pacanelli@estudante.prudente.unesp.br

**Messias Meneguette Junior**
messias@prudente.unesp.br

unesp

Departamento de Matemática, Estatística e Computação, FCT, UNESP
19060-900, Presidente Prudente, SP


## Introdução

**A aplicabilidade de equações diferenciais ordinárias e de sistemas de equações diferenciais ordinárias na modelagem de diversos tipos de problemas se dá nas mais diversas áreas do conhecimento humano. Aliada a isso, a impossibilidade de, muitas vezes, obter uma solução analítica exata para tais problemas remete à necessidade de lidarmos com procedimentos numéricos para a obtenção de soluções aproximadas.**

**Para que essa solução obtida de modo aproximado se torne interessante surge a necessidade de mensurarmos a precisão envolvida no processo.**

**Uma das formas de fazer isso é controlando o crescimento do erro com o transcorrer do processo. A esse conceito de controle da propagação do erro com o transcorrer dos passos dá-se o nome de "estabilidade numérica".**

**A análise da estabilidade se inicia com a obtenção de uma "equação de diferenças linear", a qual relaciona o erro global com: o tamanho $h$ de passo, a equação (sistema) que se deseja resolver, a quantidade de passos que se fará necessária e o método linear de passos múltiplos envolvido.**

**A solução dessa equação de diferenças evidencia o erro global do processo, induzindo à definição do "polinômio de estabilidade do método":**

$$\pi(r,\hbar)=\rho(r)-\hbar\sigma(r)$$

**A localização das raízes desse polinômio é crucial na determinação da propagação do erro, possibilitando estimar um adequado tamanho de passo para o não crescimento do erro após sucessivas aplicações do método. Para essa não propagação faz-se interessante que essas raízes do polinômio de estabilidade situem-se no interior do disco unitário no plano complexo.**

**Foca-se aqui a localização e o comportamento das raízes de polinômios dos métodos BDF, os quais se mostram eficazes na resolução de problemas stiff.**

**Seja**

$$\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

**um p.v.i. envolvendo um sistema de equações diferenciais de primeira ordem. Aqui tomamos $\hbar = h\lambda$, onde $\lambda$ corresponde aos auto-valores da matriz jacobiana $\partial f/\partial y$.**

**Os problemas stiff surgem comumente em diversas situações nas quais modelamos problemas que envolvem repentinas mudanças de dinâmica, ou seja, surgem em sistemas cujas várias componentes decaem a taxas largamente distintas. Isto é, os auto-valores de $\partial f/\partial y$ além de apresentarem parte real negativa, estas são de magnitude bastante distintas, o que proporciona acentuada razão de stiffness. Essa peculiaridade ocasiona a necessidade de se escolher um tamanho de passo relativamente pequeno com relação ao intervalo de integração mais fortemente por razões de estabilidade que pela precisão do método considerado.**

**Para a resolução de sistemas stiff mostram-se adequados os métodos BDF, os quais são dados pela relação**

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{n+j} = \sum_{j=1}^{k}\nabla^j y_{n+k} = kf_{n+k}$$

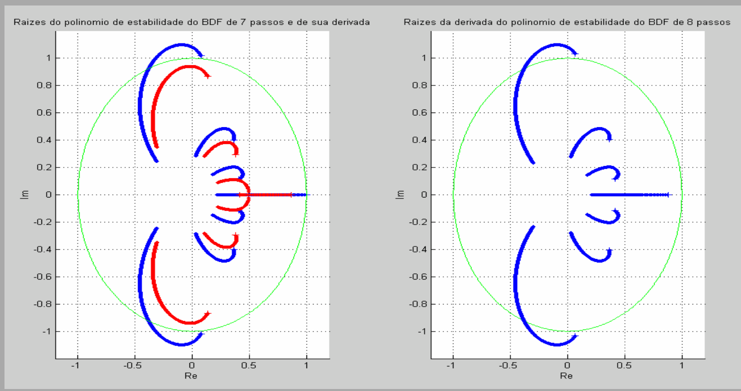
**logo, é natural estudar-se as propriedades de estabilidade que proporcionam essa adequação do método à solução do problema.**

## Metodologia

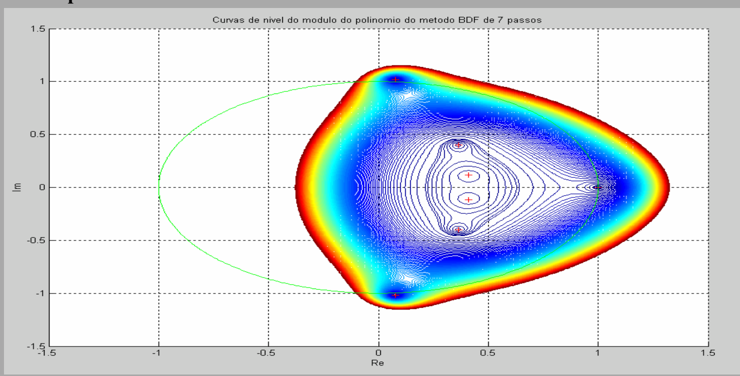
**Devido ao formato geral dos métodos BDF (mais precisamente, devido ao fato do polinômio $\sigma(r)$ ser dado por apenas um termo), juntamente com as peculiaridades dos problemas stiff (que proporcionam diversas magnitudes para $\lambda$, e conseqüentemente, para $\hbar$), perceba que o polinômio de estabilidade apresenta um parâmetro que se soma ao coeficiente do termo de maior grau.**

**Desse modo, faz-se conveniente para a análise da estabilidade observar o comportamento das raízes quando de perturbações no coeficiente do termo de maior grau do polinômio, bem como a verificação da trajetória que as raízes então descrevem. Além disso, faz-se também interessante uma análise conjunta com as raízes da derivada de tal polinômio e de seu comportamento durante essa perturbação.**

**A primeira das figuras a seguir esboça, em azul, a trajetória para as raízes do polinômio de estabilidade do BDF de sete passos, e, em vermelho, as trajetórias descritas pela derivada do polinômio durante esse processo. O segundo gráfico mostra o comportamento das raízes da derivada do polinômio de estabilidade do BDF de oito passos.**




**Como o domínio do polinômio de estabilidade é o conjunto dos complexos mostramos a seguir curvas de níveis do módulo do polinômio de estabilidade do BDF de sete passos.**




## Resultados

**Podemos perceber pelo gráfico que as raízes tendem a "entrar" no disco unitário, no plano complexo, quando executada a perturbação já descrita. Comportamento análogo ocorre com as raízes de sua derivada. Esse comportamento relativamente óbvio ocorre com todos os demais polinômios da classe.**

**Um fato que chama a atenção e que se repete com os demais polinômios da classe dos BDF é que as raízes do polinômio do método de $k$ passos se comportam de modo parecido com as raízes da derivada do polinômio de (k+1) passos.**

**Por fim, note que a trajetória das raízes indicada pela primeira figura dá alguns indícios do comportamento a ser assumido pelas curvas de níveis acima caso essas fossem efetuadas a cada perturbação no termo de maior grau do polinômio de estabilidade. Para tal situação, basta ter em mente que as raízes tendem a se aproximar da origem, de modo que em uma situação extrema (perturbação bastante grande) obteríamos curvas de níveis semelhantes à de um parabolóide.**

## Referências bibliográficas


**[1] W.C. Ferreira e R.C. "Bassanezzi, Equações Diferenciais com Aplicações". Harba, 1988.**

**[2] J.D. Lambert, "Computational Methods in Ordinary Differential Equations". John Wiley, 1973.**

**[3] M. Marden, "Geometry of Polynomials". Amer Math. Soc., Providence, RI, 1966.**