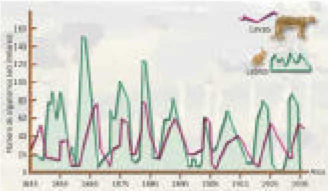
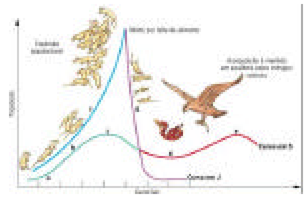
ESTUDO QUALITATIVO E NUMÉRICO DE DINÂMICAS POPULACIONAIS





Betina Vath[1], Sandra M. C. Malta[2]

[1]Universidade Federal Fluminense, tinavath@openlink.com.br

[2] Universidade do Estado do Rio de Janeiro, smcm@uniriotec.br

Introdução

Uma grande parte de fenômenos físicos são descritos matematicamente através de equações diferenciais. Em vários casos não é possível obter as soluções exatas e muitas têm que sofrer um determinado número de simplificações para que possam ter solução analítica. No entanto, essas simplificações podem acarretar erro de tal ordem que inviabilizam a representação do fenômeno de interesse. A utilização de métodos numéricos e/ou de uma análise qualitativa se torna, então, uma opção viável e imprescindível para a análise dos fenômenos. Neste trabalho, estudaremos quatro modelos que descrevem problemas relacionados à Dinâmica Populacional. Para tanto, será feita uma análise de estabilidade dos pontos críticos dos modelos, comparando com as soluções numéricas obtidas através dos métodos de Euler (Implícito e Explícito) e Runge Kutta (4ª ordem e Felhberg).

Populações de uma espécie (Modelo de Verhulst)

Por volta de 1838, Verhulst apresentou a seguinte equação como uma descrição do crescimento populacional:

$$\frac{dN}{dt} = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)N \qquad (1)$$

K - nível de saturação da população

r - taxa intrínseca de crescimento ou velocidade de crescimento na ausência de quaisquer fatores limitadores.

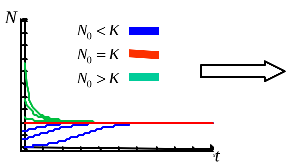


Gráfico das soluções da equação (1) – para valores arbitrários de r e K, com condição inicial $N(0) = N_0$.

Populações de duas espécies

De forma geral, as interações entre duas espécies podem ser representadas por equações do tipo:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = xf(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = yg(x,y) \end{cases} \qquad (2)$$

Essas relações são classificadas como: **INTRA-ESPECÍFICA**; **INTERESPECÍFICA**; **HARMÔNICAS OU POSITIVAS**; **DESARMÔNICAS OU NEGATIVAS**.

Apesar das equações que iremos discutir serem muito simples, em comparação com as relações muito complexas que existem na natureza, é possível adquirir uma certa visão sobre os princípios ecológicos a partir da investigação dos modelos propostos. A seguir, resumiremos as principais características desses modelos.

Espécies em Competição

As espécies em competição envolvem dois organismos que interagem na disputa de algo que não seja suficiente para os competidores. Trata-se de duas espécies competindo pela mesma quantidade de alimento em um mesmo ambiente. Uma espécie **não se alimenta** da outra. Quando as duas espécies estão presentes no mesmo ambiente, cada qual reduz a taxa de crescimento e a população de saturação da outra .

Modelo clássico de Lokta-Volterra ou Equações Presa-Predador

Lotka e Volterra modelaram a interação entre duas espécies, na qual uma espécie (predador) **alimenta-se** de outra espécie (presa), enquanto esta última vive de outra fonte de alimento. Da equação (2), temos que este modelo pode ser apresentar de forma que:

$$f(x,y) = (a - a.y) \qquad \text{e} \qquad g(x,y) = (-c + g.x)$$

onde e representam as populações de presas e predadores, respectivamente, num instante e (constante) representa a taxa de crescimento das presas, (constante) a taxa de mortalidade dos predadores, a e g também são constantes positivas e representam as medidas de interação entre as duas espécies.

Análise de Estabilidade

O estudo da estabilidade de um sistema tem por objetivo determinar se pequenas alterações em suas condições iniciais levam a pequenas ou grandes alterações em sua solução ao longo do tempo. Pequenas variações denotam casos de **estabilidade** e grandes variações, **instabilidade**.

No caso do modelo das relações entre espécies a análise de estabilidade pode permitir, por exemplo, determinar em que condições uma ou ambas as espécies entram em extinção ou atingem o equilíbrio.

Para se fazer uma análise de estabilidade do sistema de equações diferenciais associado ao modelo é necessário, primeiramente, encontrar os pontos de equilíbrio correspondentes.

Pontos de Equilíbrio (ou Pontos Críticos)

Os pontos de equilíbrio ou pontos críticos são pontos obtidos quando se tornam nulas as derivadas que descrevem o comportamento das variáveis ao longo do tempo. O ponto de equilíbrio é **estável** quando valores em sua vizinhança se aproximam desse ponto e é **instável**, caso contrário.

Exemplo:

Discutir as soluções do sistema presa-predador:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(1 - 0.5y) \\ \dfrac{dy}{dt} = y(-0.75 + 0.25x) \end{cases} \qquad (3)$$

Os pontos críticos deste sistema são soluções das equações: $x(1 - 0.5y) = 0$ e $y(-0.75 + 0.25x) = 0$; Isto é, os pontos $(0,0)$ e $(3,2)$. Note que o sistema (3) é não linear, pois é acrescido de uma constante não-nula que fornece a interação entre as espécies. Para estudar o comportamento nas vizinhanças de cada ponto crítico faremos a substituição $x = X + u$ e $y = Y + v$, onde (X, Y) é o ponto crítico em questão, obtendo o sistema abaixo:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(X,Y) & F_y(X,Y) \\ G_x(X,Y) & G_y(X,Y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

onde $F(x,y) = x - 0.5xy$ e $G(x,y) = -0.75y + 0.25xy$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0.5Y & -0.5Y \\ 0.25Y & -0.75 + 0.25X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Analisando nas vizinhanças do ponto $(0,0)$, chegamos ao seguinte sistema linear:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Através do **polinômio característico**: $\det(A - rI) = (1 - r)(-0.75 - r) = 0$, encontramos os autovalores associados: $r_1 = 1$ e $r_2 = -0.75$. Assim, o ponto $(0,0)$ é um ponto de sela e isso indica **instabilidade**, pois no eixo x as trajetória se aproximam da origem, enquanto no eixo y se afastam. Substituindo o ponto $(3,2)$ na equação (4) encontraremos

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Os autovalores e autovetores desse sistema são: $r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $r_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}i$. No modelo presa-predador os autovalores do ponto estável são sempre imaginários puros. Logo, o ponto $(3,2)$ é um **centro** do sistema linear.

Simulações Computacionais

A seguir, simulamos as trajetórias do sistema presa-predador (3). Tomamos como condição inicial $x^* = 2{,}99$ e $y^* = 1{,}89$, período de $[0, 2p]$ variando o tamanho dos passos, ou seja, $dt = 0.25, 0.5, 1.0$.

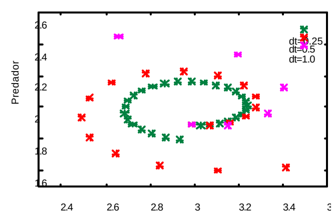


Figura 1 - Euler Explícito

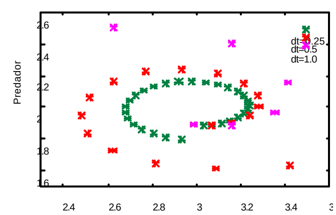


Figura 2 - Euler Implícito

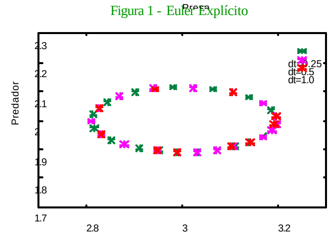


Figura 3 – Runge-Kutta de Quarta Ordem

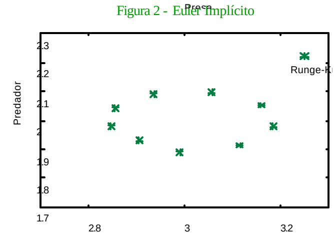


Figura 4 – Runge-Kutta Fehlberg

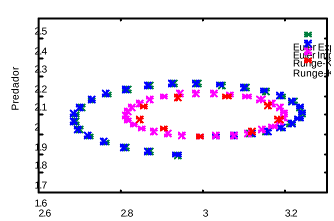


Figura 5 – Comparação entre os Métodos

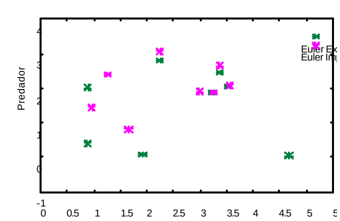


Figura 6 – Método de Euler Implícito e Explícito

Observe que as trajetórias no primeiro quadrante são curvas fechadas, quase elípticas, no sentido que circundam o ponto crítico ; e o ponto é um ponto de sela, portanto, instável. Os testes computacionais validaram os resultados obtidos através da análise de estabilidade, onde a população da presa cresce e decresce decorrente da ação predatória. Além disso, pode-se perceber, pela Figura 6, a estabilidade do Método de Euler Implícito e a instabilidade do Método de Euler Explícito.