

Uma Calculadora Financeira usando métodos numéricos e software livre

Jorge Pedraza Arpasi, Juliano Sott *

Depto de Ciências e Engenharias, Universidade Regional Integrada, URI
98400-000-, Frederico Westphalen, RS

Resumo.- Neste trabalho apresentamos e discutimos aspectos teóricos dos algoritmos financeiros quando a operação financeira de crédito é com pagamentos parcelados fixos. A seguir mostramos que estes algoritmos podem ser implementados usando o software livre QT-Designer.

1 Introdução

A maioria dos softwares para executar cálculos financeiros existentes no mercado são orientadas a **operadores** de crédito antes do que a **usuários-consumidores** destas operações. Esta situação é mais crítica, ainda, quando se trata do cálculo da taxa de juros de uma operação de crédito com pagamento parcelado. Até então, um consumidor que compra em prestações, um eletrodoméstico, por exemplo, não tem como verificar se a taxa de juros mensal, que o vendedor diz estar aplicando, é mesmo verdade. Algo similar acontece quando alguém pede um empréstimo, ou usa o cheque especial do banco do qual ele(a) é cliente.

Então, com esta motivação, na Universidade Regional Integrada, campus Frederico Westphalen, URI-FW, decidimos apresentar o projeto de iniciação científica *Construção de uma Calculadora Financeira usando Métodos Numéricos* respondendo ao Edital 01-2004 do programa PIIC. Esta calculadora enfatizaria o cálculo da taxa de juros de uma maneira simples, de modo que um usuário comum pudesse usar esta ferramenta sem dificuldade. O projeto foi aprovado sob o número de processo 1322 e o apoio da URI é com uma bolsa de Iniciação Científica ao segundo dos autores deste documento, acadêmico do curso de Ciência da Computação. Uma outra motivação foi mostrar uma aplicação do análise matemático elementar nos algoritmos financeiros.

A escolha de usar a ferramenta Qt-Designer para a implementação deste projeto foi pela boa documentação existente, seu manual [Trolltech, 2004] possui um excelente tutorial. Na seguinte etapa, do projeto, pretendemos ampliar esta implementação usando GTK, especificamente a ferramenta Glade, com o qual esta calculadora financeira estaria

disponível para ambos os ambientes KDE e GNOME, os mais populares no mundo do software livre. O aplicativo para KDE já está na versão v0.05 e disponibilizamos o mesmo no sítio web do projeto <http://www.fw.uri.br/~arpasi/financeira/index.php>. Neste sítio também existe uma outra calculadora on-line, com a mesma base teórica, implementada usando o software livre PHP que calcula exclusivamente taxas de juros. Pelas características do PHP, esta última calculadora é acessível, também, a usuários de sistemas operativos que não estão no universo do software livre.

Este documento está organizado assim; na segunda seção é discutido a parte teórica do projeto. É feita uma discussão detalhada do comportamento da função taxa de juros usando técnicas de análise real e os algoritmos numéricos mais comuns para encontrar as raízes desta função [Lima, 1992, Ruggiero M., 1996]. Na terceira seção são apresentados exemplos de uso do aplicativo para ambiente KDE.

2 Aspectos teóricos da Calculadora

2.1 Operações financeiras antecipadas: compra de produtos com entrada e pagamento parcelado

O fundamento principal das operações financeiras antecipadas cujo exemplo mais importante é a compra de produtos para serem pagos em prestações, é a equação [Morgado A., 2000]

$$A = E + \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \dots + \frac{P}{(1+i)^n}, \quad (1)$$

onde

- A = preço atual ou preço à vista.
- E = valor do pagamento no momento em que é efetuada a operação, também conhecida como “entrada”. Uma relação importante de A e de E é que $A - E > 0$, pois em caso contrário, se $A - E = 0$ então é uma compra à vista, e $A - E < 0$ é um absurdo financeiro.

*bolsista de Iniciação Científica PIIC/URI

- P =valor da prestação ou parcela a partir do seguinte período de tempo. Como $A - E > 0$ então $P > 0$.
- i =taxa de juros da operação. O valor desta taxa é sempre maior do que zero e consideraremos taxa máxima de 100%, isto é, $0 < i \leq 1$
- n =número de parcelas, referido períodos de tempo os mesmo que que majoritariamente são meses. Desde que $P > 0$ então $n \geq 1$.

O valor total a ser pago T é a soma dos valores das parcelas P e o valor da entrada E , isto é;

$$T = E + nP, \quad (2)$$

e uma condição importante é que o preço total T deve ser maior do que o preço à vista A , isto é;

$$T = E + nP > A \quad (3)$$

Em caso contrário, se fosse $T = nP + E = A$ na equação (1), teríamos $i = 0$, ou seja taxa de juros "zero"; e se fosse $T = nP + E < A$ teríamos $i < 0$, taxa de juros negativa, um absurdo.

2.1.1 Cálculo dos valores da parcela P , e número de prestações n

Usando a identidade algébrica

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \quad (4)$$

a equação fundamental (1) converte-se em

$$A = E + \frac{P}{1+i} \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}} \right), \quad (5)$$

donde podemos obter, por manipulações puramente algébricas, o valor da prestação

$$P = \frac{(A - E)i}{1 - (1+i)^{-n}}, \quad (6)$$

e também o número de parcelas que pode servir basicamente para verificação

$$n = -\frac{\log(1 - (\frac{A-E}{P})i)}{\log(1+i)} \quad (7)$$

Um conceito importante em operações financeiras, que no caso não tem importância para o usuário de pagamentos parcelados é o valor futuro F do preço à vista daqui a n meses

$$F = E + A(1+i)^n \quad (8)$$

Usando (5) teremos

$$F = E + \frac{P((1+i)^n - 1)}{i} \quad (9)$$

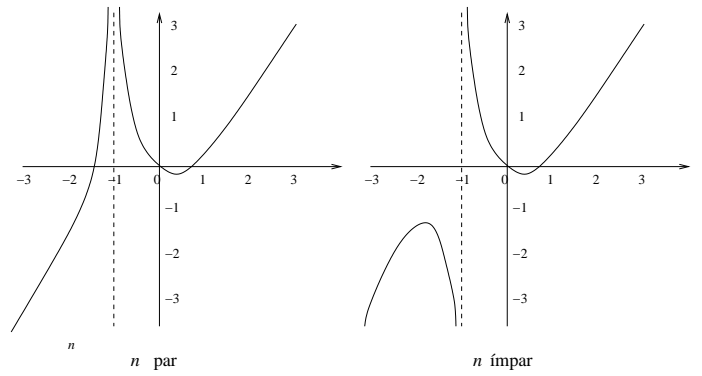


Figura 1: Função taxa de juros $f(i) = \frac{A-E}{P} i + (1+i)^{-n} - 1$, para n par e n ímpar

Uma observação é que o valor total T de (2) é sempre menor do que F . Com efeito, basta considerar que a função linear $f(x) = ax + 1$ é menor do que a função exponencial $g(x) = (1+a)^x$ para todo $x > 1$, e $a > 0$. Se $x = 1$ teremos $f = g$. Então

$$\begin{aligned} ni + 1 &< (1+i)^n \\ n &< \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ nP &< \frac{P((1+i)^n - 1)}{i} \\ E + nP &< E + \frac{P((1+i)^n - 1)}{i} \\ T &< F \end{aligned}$$

2.1.2 Cálculo da taxa de juros i

Já para calcular a taxa de juros i as manipulações algébricas são insuficientes em razão de que não há como deixar em evidência esta variável i a partir da equação fundamental (1). Então, para resolver isto, usando a equação (6), obtemos

$$\frac{A-E}{P}i = 1 - (1+i)^{-n}$$

donde

$$\left(\frac{A-E}{P} \right) i + (1+i)^{-n} - 1 = 0$$

isto é, conhecidas as variáveis A , E , P , e n ; a taxa de juros i pode ser interpretada como uma raiz da função

$$f(i) = \left(\frac{A-E}{P} \right) i + (1+i)^{-n} - 1 \quad (10)$$

Vamos fazer uma análise desta função. Em primeiro lugar o domínio da mesma é $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$. O comportamento da função em torno da assíntota $i = -1$, e nos infinitos $-\infty$ e $+\infty$ é:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow -1^+} [f(i)] &= +\infty \\ \lim_{i \rightarrow -1^-} [f(i)] &= \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \\ \lim_{i \rightarrow -\infty} [f(i)] &= -\infty \\ \lim_{i \rightarrow +\infty} [f(i)] &= +\infty. \end{aligned}$$

Por outro lado f é derivável em todo D_f , sendo a derivada $\frac{\partial f(i)}{\partial i} = \frac{A-E}{P} - n(1+i)^{-n-1}$, para todo $i \neq -1$. Os pontos críticos obtemos fazendo $\frac{\partial f(i)}{\partial i} = 0$. Se n é par teremos um único ponto crítico que é $i = \sqrt[n+1]{\frac{nP}{A-E}} - 1$ que é um valor positivo, vide Figura 1. Se n é ímpar obtemos dois pontos críticos $i_1 = \sqrt[n+1]{\frac{nP}{A-E}} - 1 > 0$ e $i_2 = -\sqrt[n+1]{\frac{nP}{A-E}} - 1 < -1 < 0$, vide Figura 1.

Desde que $f(0) = 0$ e $\frac{\partial f(0)}{\partial i} < 0$, então existe $i_0 > 0$ tal que $f(i) < 0$ para todo $i \in (0, i_0)$. Escolha α arbitrário, porem fixo, tal que $i_0 > \alpha > 0$ então $f(\alpha) < 0$. Por outro lado, $f(1) = \left(\frac{A-E}{P}\right)1 + (1+1)^{-n} - 1 = \frac{A-E}{P} + \left(\frac{1}{2^n} - 1\right) > 0$

Portanto a continuidade de f em $(\alpha, 1) \subset D_f$, garante a existência $\gamma \in [\alpha, 1]$ tal que $f(\gamma) = 0$. Este valor γ é a taxa de juros que pode ser encontrada por métodos numéricos iterativos de cálculo de raízes de uma função, tais como o método da **Bissecção** e o método de **Newton-Raphson**. No presente projeto usamos o algoritmo da Bissecção mostrado a seguir

ALGORITMO

begin

//Informar A, E, P, n ,

//Informar ϵ

do

$a_1 = \alpha; b_1 = 1; i_1 = \frac{a_1+b_1}{2};$
 $k = 1;$

od

while $|b_k - a_k| > \epsilon$ **do**

if $f(a_k) * f(i_k) > 0$

$a_{k+1} = i_k;$

$b_{k+1} = b_k;$

$i_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2};$

elsif $f(a_k) * f(i_k) < 0$

$a_{k+1} = a_k;$

$b_{k+1} = i_k;$

$i_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2};$

else

$break;$

fi

$k = k + 1;$

od

do

Taxa de juros = i_k ; //com aproximação ϵ

Raiz de juros aproximada = $f(i_k)$

od

end

2.2 Operações financeiras postecipadas: compra de produtos sem entrada e pagamento parcelado e postergado, empréstimos bancários

O fundamento principal das operações financeiras postecipadas cujos exemplos mais importantes são

a compra de produtos para serem pagos em prestações, e os empréstimos bancários, é a equação

$$A = \frac{P}{(1+i)^m} + \frac{P}{(1+i)^{m+1}} + \dots + \frac{P}{(1+i)^{m+n-1}}, \quad (11)$$

onde

- m =número de períodos de tempo da postergação, usualmente meses. Esta postergação não pode ser menor do que 1, isto é, $m \geq 1$.
- A = preço atual ou preço à vista.
- P =valor da prestação ou parcela a partir do periodo de tempo m . Como $A > 0$ então $P > 0$.
- i =taxa de juros da operação. O valor desta taxa é sempre maior do que zero e consideraremos taxa máxima de 100%, isto é, $0 < i \leq 1$
- n =número de parcelas ou períodos de tempo, os mesmos que majoritariamente são meses. Desde que $P > 0$, então $n \geq 1$.

Note que para $m = 1$, teremos que (11) converte-se em $A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \dots + \frac{P}{(1+i)^n}$, que coincide como a equação (1) sem entrada, i.e., com $E = 0$. O valor total ou final T a ser pago é a soma dos valores das parcelas P , isto é;

$$T = nP, \quad (12)$$

Pelas mesmas considerações usadas em (3), neste caso também devemos ter que o preço final T deve ser maior do que o preço à vista A , isto é;

$$T = nP > A. \quad (13)$$

2.2.1 Cálculo dos valores da parcela P , e número de prestações n

Usando, de novo, a identidade algébrica (4), a equação fundamental postecipada (11) converte-se em

$$A = \frac{P}{(1+i)^m} \left(\frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-1}} \right) = \frac{P(1 - (1+i)^{-n})}{i(1+i)^{m-1}},$$

donde podemos obter, por manipulações puramente algébricas, o valor da prestação

$$P = \frac{Ai(1+i)^{m-1}}{1 - (1+i)^{-n}}, \quad (14)$$

e também o número de parcelas que pode servir basicamente para verificação

$$n = -\frac{\log(1 - (\frac{A}{P})i(1+i)^{m-1})}{\log(1+i)} \quad (15)$$

2.2.2 Cálculo da taxa de juros i

Do mesmo modo que para o caso das operações antecipadas, para o cálculo da taxa de juros i , no caso postecipado, as manipulações algébricas são insuficientes em razão de que não há como deixar em evidência esta variável i na equação fundamental (11). Então, para resolver isto, usando a equação (14), obtemos

$$P[1 - (1 + i)^{-n}] = Ai(1 + i)^{m-1}$$

donde

$$\frac{A}{P}i(1 + i)^{m-1} + (1 + i)^{-n} - 1 = 0$$

isto é, conhecidas as variáveis A , P , n e m ; a taxa de juros i pode ser interpretada como uma raiz da função

$$f(i) = \frac{A}{P}i(1 + i)^{m-1} + (1 + i)^{-n} - 1 \quad (16)$$

Note que se em (10) $E = 0$, e em (16) $m = 1$, ambas as equações coincidem. O domínio da função (16) é $D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$ onde é derivável e portanto contínua. O comportamento da função em torno da assíntota $i = -1$, e nos infinitos $-\infty$ e $+\infty$ é:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow -1^+} [f(i)] &= +\infty \\ \lim_{i \rightarrow -1^-} [f(i)] &= \begin{cases} +\infty & \text{se } n \text{ par} \\ -\infty & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases} \\ \lim_{i \rightarrow -\infty} [f(i)] &= \begin{cases} +\infty & \text{se } m \text{ par} \\ -\infty & \text{se } m \text{ ímpar} \end{cases} \\ \lim_{i \rightarrow +\infty} [f(i)] &= +\infty. \end{aligned}$$

Claramente temos que $f(0) = 0$ e para a derivada $\frac{\partial f(i)}{\partial i} = m \frac{A}{P}(1+i)^{m-1} - (m-1) \frac{A}{P}(1+i)^{m-2} - n(1+i)^{-n-1}$, temos $\frac{\partial f(0)}{\partial i} = \frac{A}{P} - n$ que pela condição (13) tem sinal negativo. Isto implica que existe $i_0 > 0$ tal que $f(i) < 0$ para todo $i \in (0, i_0)$. Escolha α arbitrário, porem fixo, tal que $i_0 > \alpha > 0$ então $f(\alpha) < 0$. Por outro lado, $f(1) = \frac{A}{P} \cdot 1 \cdot 2^{m-1} + \frac{1}{2^n} - 1 = \frac{A}{P} 2^{m-1} + (\frac{1}{2^n} - 1) > 0$, pois $m \geq 1$. Portanto a continuidade de f em $(\alpha, 1) \subset D_f$, garante a existência $\gamma \in (\alpha, 1)$ tal que $f(\gamma) = 0$. Este valor γ é a taxa de juros que pode ser encontrada pelo método da Bissecção descrito acima.

3 Implementação da calculadora usando os software livre QT-Designer

O algoritmo da bissecção junto com as fórmulas derivadas de (1), para o caso antecipado, e (11), para o caso postecipado; foram implementados com QT-Designer para construir o aplicativo, seguindo as orientações do manual de esta ferramenta [?]

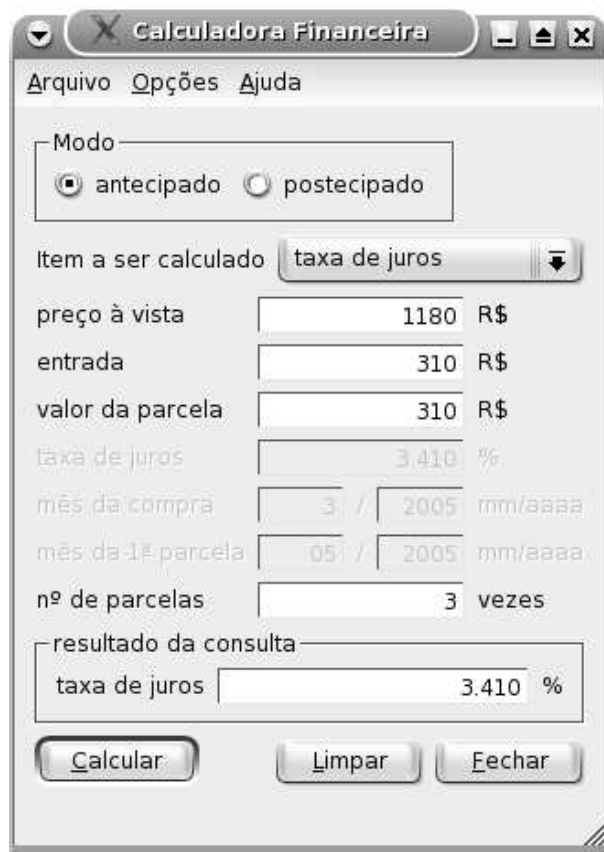


Figura 2: Cálculo da taxa de juros mensal em modo antecipado

3.1 A Calculadora Financeira possui dois modos: o Antecipado e o Postecipado.

Para escolher entre o modo Antecipado e o modo Postecipado basta clicar no ítem correspondente dentro do quadro denominado "Modo".

3.1.1 Modo Antecipado

O Modo Antecipado, ou antecipação, é usado quando é paga uma entrada e as prestações são pagas nos meses subsequentes.

No Modo Antecipado pode-se escolher os seguintes ítems para serem calculados:

- preço à vista
- preço final
- entrada
- valor da parcela
- taxa de juros
- número de parcelas

Exemplo 1 *Suponha que você vai a uma loja de eletrodomésticos para comprar uma máquina de lavar roupa cujo preço à vista é 1180 reais. Um*

dos esquemas de financiamento da máquina que o vendedor lhe oferece é entrada de 400 reais mas 3 prestações mensais de 280 reais cada. Qual é a taxa de juros mensal aplicada?

Os campos da calculadora(para este exemplo) devem ser preenchidos assim: Valor atual=1180, Entrada=310, Valor da Parcela=310, Numero de Parcelas=3

As resposta da calculadora mostrado no campo "Resultado da Consulta"será: 3.41%, conforme mostrado na Figura 2

3.1.2 Modo Postecipado

O modo postecipado, é usado quando se começa a pagar alguns meses após a compra, por exemplo: "compre em dezembro e só comece a pagar em março do próximo ano".

No Modo Postecipado pode-se escolher os seguintes ítems para serem calculados:

- preço à vista
- preço final
- valor da parcela
- taxa de juros
- número de parcelas

Exemplo 2 *Suponha agora que você quer adquirir um empréstimo 3000 reais do seu banco para ser pago em 12 parcelas mensais e iguais. O operador do seu banco lhe diz que cada mês você vai pagar 340 reais. A primeira parcela terá que pagar depois de dois meses. Qual é a taxa de juros mensal que você vai pagar ao banco?*

Os campos da calculadora(para este exemplo) devem ser preenchidos assim: Valor atual=3000, Valor da Parcela=320, Mês Atual=03/2005, Mês do primeiro Pagamento=05/2005, Numero de Parcelas=12

As resposta da calculadora mostrada no campo "Resultado da Consulta"será: 4,33%, conforme mostrado na Figura 3

Referências

[Lima, 1992] Lima, E. (1992). *Análise Real*, volume 1. IMPA.

[Morgado A., 2000] Morgado A., E. Wagner, S. Z. (2000). *Progressões e Matemática Financeira*. IMPA, Rio de Janeiro, 4ta edition.

[Ruggiero M., 1996] Ruggiero M., V. L. (1996). *Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Ed. Makron Books, São Paulo, 2da edition.

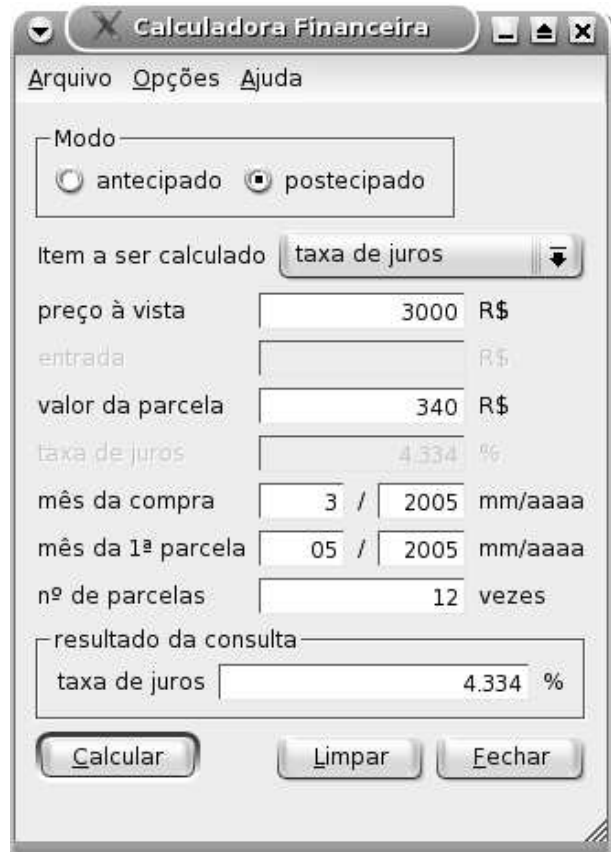


Figura 3: Cálculo da taxa de juros mensal em modo postecipado

[Trolltech, 2004] Trolltech, I. (2004). *Qt Assistant - Qt Reference Documentation (free edition)*. <http://www.trolltech.com/dl/qtfree-dl.html>.