

Order stars e métodos lineares de passos múltiplos: um estudo de algumas propriedades

José Claudinei Ferreira, José Roberto Nogueira, Suetônio de Almeida Meira
Joseclaudineiferreira@yahoo.com.br, jrnog@prudente.unesp.br



Introdução

A teoria de Order Stars, introduzida por Wanner et al (1978), cuja essência é o estudo do comportamento de métodos numéricos a partir do estudo das propriedades de funções analíticas em algumas regiões do plano complexo, se tornou uma ferramenta muito importante, senão fundamental, para o estudo das propriedades dos métodos numéricos para a resolução de equações diferenciais.

Order Stars

Sejam f , uma função complexa, e R uma aproximação desta função. Tomemos

$$\bar{p}(z) = R(z) - f(z), \forall z \in C \cup \{\infty\} = c \cup C$$

onde $f \in R$ estão bem definidas.

Definição: [2] Dizemos que a tripla $\{\bar{A}_+, \bar{A}_0, \bar{A}_-\}$

$$\bar{A}_+ = \{z : \operatorname{Re} \bar{p}(z) > 0\}$$

$$\bar{A}_0 = \{z : \operatorname{Re} \bar{p}(z) = 0\}$$

$$\bar{A}_- = \{z : \operatorname{Re} \bar{p}(z) < 0\}$$

é a order star do segundo tipo de $f \in R$.

Definição: [2] Dizemos que o ponto z_0 é um ponto de interpolação de grau $p > 0$ se f for analítica em sua vizinhança e se

$$|z_0| < \infty : R(z) = f(z) + C_1(z - z_0)^p + O(|z - z_0|^{p+1}), C_1 \neq 0;$$

$$|z_0| = \infty : R(z) = f(z) + C_2 z^{-p} + O(|z|^{-p-1}), C_2 \neq 0.$$

O grau de interpolação pode ser obtido da geometria da order star, contando-se o número de setores de \bar{A}_+ e \bar{A}_- que se aproximam de z_0 .

Teorema: [2] Se z_0 é um ponto de analiticidade de \bar{p} e um ponto de interpolação de grau $p > 0$ então $z_0 \in \bar{A}_0$. Além disso z_0 é aproximado por exatamente p setores de \bar{A}_+ cada um com um ângulo assintótico de π/p de forma análoga para \bar{A}_- e neste caso dizemos que z_0 é regular.

Métodos numéricos lineares de passos múltiplos

Seja

$$y' = f(x, y), y(a) = \eta,$$

uma EDO que supomos satisfazer às condições do teorema da existência e unicidade no intervalo $[a, b]$, e seja $y(x)$ sua solução. Se tentarmos encontrar uma aproximação para a solução com o método de ordem p

$$(1) \quad \sum_{j=0}^k \alpha_j y_{n+j} = h \sum_{j=0}^k \beta_j f_{n+j}$$

com α_j, β_j constantes, $\alpha_k = 1$ e $|\alpha_0| + |\beta_0| \neq 0, x_{n+1} = x_n + h$.

Teorema: [1] Uma condição necessária e suficiente para a convergência do método (1) é este possua ordem $p > 0$ e que

$$r(z) = \sum_{j=0}^k \alpha_j z^j$$

possua apenas raízes com módulo menor ou igual a 1 e que as raízes com módulo 1 sejam simples (zero-estável).

Métodos lineares de passos múltiplos e order stars

Teorema: [3] O método (1) possui ordem p se, e somente se,

$$r(w) - s(w) \log(w) = O(|w-1|^{p+1})$$

Seja

$$\bar{p}(z) = \frac{\sum_{j=0}^k \beta_j e^{jz}}{\sum_{j=0}^k \alpha_j e^{jz}} - \frac{1}{z} = \frac{r(e^z)}{s(e^z)} - \frac{1}{z}$$

Corolário: [2] Se o método (1) possuir ordem $p > 1$ então a origem é um ponto regular da order star, aproximado por $p-1$ setores de \bar{A}_- .

Proposição: Dizer que o método (1) é zero-estável é equivalente a dizer os pólos de \bar{p} estão no semi-plano complexo esquerdo e que os pólos imaginários puros são simples.

Aplicação

O método linear, (método de Adams-Mouton [3])

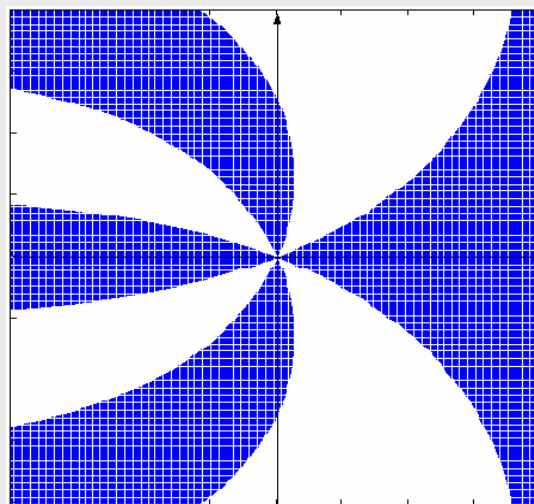
$$y_{n+4} - y_{n+3} = \frac{h}{720} (251f_{n+4} + 646f_{n+3} - 264f_{n+2} + 106f_{n+1} - 19f_n)$$

é tal que

$$r(w) = w^4 - w^3,$$

$$s(w) = \frac{1}{720} (251w^4 + 646w^3 - 264w^2 + 106w - 19)$$

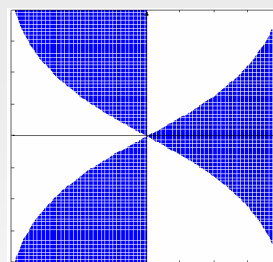
e claramente é zero-estável. Observando sua order star (\bar{A}_+ em azul), abaixo temos que sua ordem é 5.



O método de Milne [3]

$$y_{n+2} - y_{n+1} = \frac{h}{3} (f_{n+2} + 4f_{n+1} + f_n)$$

é zero-estável e de ordem 4, conforme sua order star, abaixo.



Considerações finais

A teoria de order stars foi de grande importância para o desenvolvimento da teoria de métodos numéricos, pois colocou a disposição as diversas propriedades da teoria de variáveis complexas.

Referencias bibliograficas

- [1] HENRICI, P.. Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, United States of America, John Wiley & Sons, 1965.
- [2] ISERLES, A. & NORSETT, S.P.. Order Stars, London, Chapman & Hall, 1991.
- [3] LAMBERT, J.D.. Computational Methods in Ordinary Differential Equations, Great Britain, John Wiley & Sons, 1973.