

Número de árvores geradoras de grafos

JAIME V. C. SILVA – jaimevelasco@globo.com;

FERNANDA L. S. FERREIRA – flucia@oi.com.br;

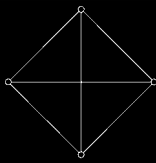
CYBELE T. M. VINAGRE – cybl@vm.uff.br.

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE – INSTITUTO DE MATEMÁTICA

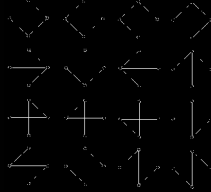
INTRODUÇÃO

Uma *árvore* é um grafo conexo e sem ciclos. Uma *árvore geradora* de um grafo G é um subgrafo que tem os mesmos vértices de G e é uma árvore.

1- **Exemplo:** O grafo completo K_4 e suas árvores geradoras



Grafo completo K_4



As 16 árvores geradoras do K_4

O "Teorema da Matriz-árvore", provado por Kirchhoff em 1847, resolveu o problema de determinação do número de árvores geradoras de um grafo simples.

Este problema encontra aplicações em diversas áreas, como representação de moléculas na Química e desenho de redes.

TEOREMA DA MATRIZ-ÁRVORE

Seja G grafo simples com n vértices. O *laplaciano* de G é a matriz quadrada L de ordem n cujas entradas são dadas por

$$l_{ij} = \begin{cases} d(v_i), & \text{se } i = j; \\ -1, & \text{se } i \neq j \text{ e } v_i \text{ adjacente a } v_j; \\ 0, & \text{se } i \neq j \text{ e } v_i \text{ no adjacente a } v_j, \end{cases}$$

onde $d(v_i)$ indica o número de arestas que incide no vértice v_i (*grau* de v_i).

2-**Teorema da Matriz-árvore:** O número $\tau(G)$ de árvores geradoras de G é dado por

$\tau(G)$ = qualquer cofator do laplaciano de G .

Na prova deste teorema, aplicamos técnicas de teoria espectral de grafos, utilizando propriedades do laplaciano e da matriz de incidência do grafo G , além de resultados de teoria de determinantes.

3-**Exemplo:** O número de árvores geradoras do grafo completo K_n é n^{n-2} . De fato, neste caso, o laplaciano é $L = nI - J$, onde J é a matriz quadrada de ordem n cujas entradas são todas iguais a 1 e I é a matriz identidade de ordem n . O cofator de ordem 1×1 de L é

$$\Delta_{11} = (-1)^2 \det \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & n & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{pmatrix} = n^{n-2}$$

A matriz em (1) foi obtida da primeira somando-se as linhas 2, 3, ..., (n-1) à primeira linha. A matriz em (2) foi obtida de (1) somando-se a primeira linha a todas as outras; repetindo este processo com as demais linhas chegamos a uma matriz triangular superior, cujo determinante é exatamente n^{n-2} .

De maneira análoga, mostra-se que o número de árvores geradoras do ciclo C_n é igual a n .

4-**Corolário:** Se G é grafo k -regular então sua matriz de adjacência $A(G)$ (isto é, a matriz quadrada de ordem n em que cada entrada a_{ij} é igual a 1 ou 0, conforme o vértice v_i seja ou não adjacente ao vértice v_j), tem autovalores e respectivas multiplicidades dadas por

$$\text{Spect}(G) = \begin{pmatrix} k & \lambda_1 & \dots & \lambda_{s-1} \\ 1 & m_1 & \dots & m_{s-1} \end{pmatrix}$$

Neste caso, temos que

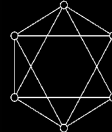
$$\tau(G) = n^{-1} \prod_{r=1}^{s-1} (k - \lambda_r)^{m_r}$$

APLICAÇÕES

5- **Número de árvores geradoras de grafos-linha de grafos k -regulares:**

Seja G um grafo k -regular com n vértices e m arestas. O grafo-linha $l(G)$ de G é construído tomando-se as arestas de G como vértices de $l(G)$ e ligando-se dois vértices em $l(G)$ sempre que as correspondentes arestas de G têm um vértice em comum. Usando o corolário anterior e resultados conhecidos de grafos-linha, obtemos que

$$\tau(l(G)) = 2^{m-n+1} k^{m-n-1} \tau(G).$$



O grafo-linha do K_4

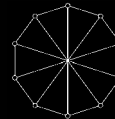
Logo, o grafo acima tem $2^3 \cdot 3 \cdot 16 = 384$ árvores geradoras.

Note, que K_4 é 3-regular. Temos, neste caso, que $n = 4$ e $m = 6$. Já vimos que $\tau(K_4) = 16$.

6- **Número de árvores geradoras do grafo M_h (Möbius Ladder)**

Indicamos por M_h o grafo com $2h$ vértices satisfazendo

$$\begin{cases} v_1 \text{ é adjacente a } v_n; \\ v_i \text{ é adjacente a } v_{i+1} \quad \forall i, 1 \leq i \leq 2h-1; \\ v_i \text{ é adjacente a } v_{i+h} \quad \forall i, 1 \leq i \leq h; \end{cases}$$



Möbius Ladder M_5

A matriz de adjacência $A(M_h)$ de M_h é a seguinte matriz circulante de ordem $2h$ cuja primeira linha é $[0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$. Seu polinômio característico é $q(x) = x + x^h + x^{2h-1}$ e suas raízes são

$$\lambda_k = q(\omega^k) = \omega^k + \omega^{kh} + \omega^{k(2h-1)}, \quad \text{para cada } k, 0 \leq k \leq 2h-1,$$

onde ω é uma raiz $2h$ -ésima da unidade diferente de 1. Desenvolvendo, obtemos, para cada $k, 0 \leq k \leq 2h-1$

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{2h}\right) + \cos\left(\frac{2kh\pi}{2h}\right) + \cos\left(\frac{2k(2h-1)\pi}{2h}\right) \right] + i \left[\sin\left(\frac{2k\pi}{2h}\right) + \sin\left(\frac{2kh\pi}{2h}\right) + \sin\left(\frac{2k(2h-1)\pi}{2h}\right) \right] \\ &= 2\cos\left(\frac{k\pi}{h}\right) + (-1)^k. \end{aligned}$$

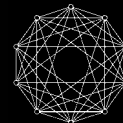
Como M_h é um grafo 3-regular, o corolário acima nos diz que

$$\tau(M_h) = \frac{1}{2h} \prod_{k=1}^{2h-1} (3 - 2\cos\left(\frac{k\pi}{h}\right) - (-1)^k).$$

Logo, o grafo M_5 tem 1815 árvores geradoras.

7- **Número de árvores geradoras do H_s (hiperocaedro):**

O hiperocaedro H_s é o grafo com $2s$ vértices no qual cada vértice v_i é adjacente a todos os outros, menos ao v_{i+s}



O Hiperocaedro H_5

A matriz de adjacência $A(H_s)$ de H_s é também circulante de ordem $2s$. Um raciocínio semelhante ao anterior mostra que

$$\begin{aligned} \tau(H_s) &= \frac{1}{2s} \prod_{i=1}^{2s} (2s-2-\lambda_i)^{m_i} = \frac{1}{2s} (2s-2)^s (2s)^{s-1} \\ &= 2^{2s-2} (s-1)^s s^{s-2}. \end{aligned}$$

Logo, o grafo acima tem 32768000 árvores geradoras.