Modelagem Matemática Atuarial e Simulações Numéricas Aplicadas aos Sistemas de Seguros

Autor:
Celso Fernandes Araujo Filho (Bolsista CNPq)
celso@ime.unicamp.br

Orientador:
Prof. Dr. Laércio Luis Vendite
vendite@ime.unicamp.br

O seguro

O que é um seguro?

Trocar uma despesa futura, alta e incerta por uma despesa imediata ou periódica, baixa e certa.

Exemplo

Um indivíduo adquiriu um automóvel. Despesa futura, alta e incerta seria substituir o automóvel se roubado. Despesa imediata ou periódica, baixa e certa seriam as mensalidades ou anuidades do seguro de automóveis (o *prêmio*); se roubado, o indivíduo é ressarcido pela seguradora (a *indenização*).

Seguro de vida

Modalidade estudada

Seguro por vida inteira: prêmio único ou anual, indenização paga quando do falecimento do segurado.

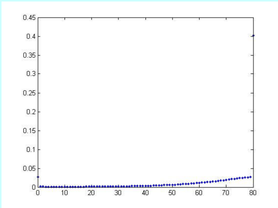
Princípio básico

O prêmio depositado num fundo a juros (assumidos constantes) pela seguradora e, então, sacado quando do pagamento da indenização.

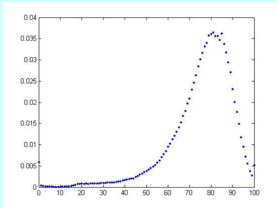
Tábua de mortalidade

Contém estatísticas com probabilidades de morte anual para indivíduos de diversas idades. Usei uma tábua do IBGE (ambos os sexos) e uma do Reino Unido (masculina). A brasileira termina a contagem aos 80 anos e a britânica, 100 anos.

Probabilidade de morte por idade



Brasil



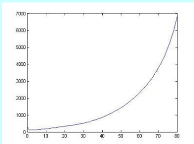
Reino Unido

Cálculo do prêmio puro anual

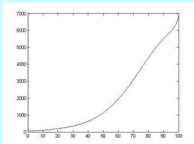
A perda esperada pela seguradora deve ser zero: $E[L]=0$ (*princípio de equivalência*)

O prêmio é dado pela expressão $\prod_x = C(1-v)\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} P(\{K=k\})$

Aspecto dos prêmios por idade*



Brasil



Reino Unido

**Cconsiderando i = 8% e C = 100.000)*

Simulações numéricas

O modelo para o prêmio puro foi confirmado e validado por meio de simulações numéricas apoiadas na Lei Fraca de Grandes Números, considerando-se várias taxas de juros e quantidades de segurados.

Prevenindo-se do risco

Definimos uma *função utilidade u* para medir a utilidade que a seguradora tem numa quantia *z*. Sendo $a > 0$ um parâmetro de risco arbitrário, definimos $u(z)$ e o princípio de equivalência se altera, para conservarmos a utilidade ao invés do capital:

$$u(z)=\frac{1}{a}(1-e^{-az}) \Rightarrow E[u(-L)]=u(0)$$

Logo, o prêmio líquido anual pode ser calculado explicitamente:

$$\prod_x = \frac{(1-v)}{a}\log\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{aCv^{n+1}} P(\{K=k\})\right)$$

Assumindo um brasileiro de 35 anos, $a = 10^{-6}$ e $i = 8\%$, temos então:

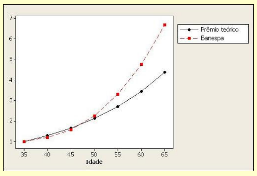
Soma assegurada C	$\prod_x$	Percentagem do prêmio puro
50.000	359,73	106%
300.000	2.942,52	145%
600.000	10.663,43	263%
900.000	25.462,82	418%
1.500.000	62.942,99	620%
2.000.000	95.911,16	708%

Precificação final

Mantém-se o prêmio proporcional à soma assegurada escolhendo-se um *valor de corte* e aplicando sua percentagem correspondente aos prêmios puros, obtendo-se o prêmio final. Por exemplo, tome $C^* = 600.000$ e aumente todos prêmios puros em 263%. Para se prevenir do risco vindo de maiores somas asseguradas, faça *resseguro* para quantias acima de C^*.

Confrontando com dados reais

Abaixo estão dados teóricos brasileiros a $i = 8\%$ confrontados com dados de prêmios do Banespa, ambos normalizados a um mesmo patamar inicial:



Consideramos que estes dados reais validam o modelo; muito embora a partir de certo ponto os dados do Banespa crescem mais rapidamente que os teóricos, interpreto isto como uma forma de se proteger do risco de se assegurar indivíduos mais idosos.

Conclusão

Apresentamos métodos probabilísticos e de matemática financeira para precificar apólices de seguros de vida. Simulações numéricas validaram os modelos estudados. Através de uma função utilidade, modelamos o risco financeiro do negócio de seguros de vida e comparamos dados teóricos com dados reais, validando o modelo de risco.