

# Métodos Numéricos em Equação Diferencial Generalizada para Precificação de Opções

Julio C. A. Thomaz (thomaz@lncc.br) e Abimael F. Loula (aloc@lncc.br)

Laboratorio Nacional de Computação Científica, LNCC/MCT

## INTRODUÇÃO

Um dos pontos mais importantes relativos às opções é como elas seriam cotadas numa situação de equilíbrio com o preço do ativo subjacente e características das opções. O prêmio pode ser modelado com uma equação diferencial parabólica como apresentado em Thomaz (2004). Para alguns contratos a equação não apresenta solução analítica, desta forma existe a necessidade de utilização de métodos numéricos para precificação de opções.

Embora os retornos empíricos do preço do ativo subjacente no mercado financeiro claramente não segue a distribuição de probabilidade Log-Normal, diversos trabalhos de análise matemática em finanças são baseados nessa distribuição de probabilidade. Em especial o mais importante, o trabalho de Black & Scholes (1973). Porém, sabe-se que o modelo subestima o prêmio das opções nas situações em que o preço do ativo no mercado no tempo de exercício é diferente do preço de exercício. A fim de igualar os valores de mercado observados, o modelo de Black e Scholes necessitaria usar um valor diferente da volatilidade para cada valor do preço de exercício. Tal "volatilidade implícita" das opções de vários preços de exercício forma uma função convexa chamada de "volatility Smile".

Neste trabalho, desenvolve-se uma teoria segundo Borland (2002), em que o preço do ativo subjacente segue uma distribuição de probabilidade Não Gaussiana, assim apresenta-se uma nova equação e inequação diferencial para as opções Europeias e Americanas, respectivamente. Utiliza-se o processo estocástico de feedback para os preços dos ativos no mercado à vista. Tal processo foi desenvolvido recentemente dentro da mecânica estatística não-extensiva por Tsallis (1988). Onde o caminho aleatório pode ser interpretado como um processo generalizado do Wiener, governado por uma distribuição de probabilidade de Tsallis para entropia com parâmetro termodinâmico não-extensivo "q". Verifica-se que quando "q" → 1, recupera-se o modelo de Black & Scholes. Para q = 1.5, foi verificado por Borland (2002) que o modelo aproxima a distribuição empírica observada para muitas séries temporais financeiras, tais como preços do índice de ativos no mercado financeiro, SP500, etc.

## OPÇÕES EUROPEIAS

Todos os trabalhos que seguem a modelagem apresentada por Black & Scholes (1973) têm o movimento do preço do ativo subjacente, dado por  $S(t + \Delta t) = S(t)e^{\mu\Delta t}$ , onde  $y(t)$  segue o processo de Wiener, que o ruído aleatório é um movimento Browniano. Isto é admitido por Black & Scholes (1973) como uma das hipóteses para o seu modelo, onde submete uma distribuição probabilística Gaussiana para  $y(t)$ , o que resulta numa distribuição de probabilidade Log-Normal para o preço do ativo subjacente  $S$ . Porém assumindo-se que  $y(t)$  segue o processo estocástico dado por:

$$dy = \mu dt + \sigma d\Omega \quad (1)$$

onde  $\Omega$  envolve o processo estocástico obtido por Borland (1998) e  $d\Omega = P_n^{\frac{1}{2}} du$ .

A distribuição de probabilidade  $P$  satisfaz a equação Fokker-Planck Não-Linear, onde a solução é dada pela distribuição de Tsallis ( $P_n$ ). Assumindo que  $t_0 = 0$ , tem-se que  $y(t) = \ln S(t) / \ln S(0)$ . Supondo que  $F$  satisfaz as condições do Lema de Itô, chega-se a:

$$dy = \left( \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial S^2} (\sigma S)^2 P_n^{-1} \right) dt + \frac{\partial y}{\partial S} \sigma S ds$$

usando a Eq.(1), e como  $\partial y / \partial S = 1/S(t)$ ,  $\partial^2 y / \partial S^2 = -1/S^2(t)$ ,  $\partial y / \partial t = 0$ , chega-se ao processo estocástico para o preço do ativo, dado por:

$$dS = \mu S dt + \sigma S d\Omega \quad \text{sendo } \mu = \mu + \frac{\sigma^2}{2} P_n^{-1} \quad (2)$$

Agora considerando-se que  $F(S, t)$  é o prêmio da opção no instante  $t$ , quando a ação custa  $S = S$ . Supondo que  $F$  satisfaz as condições do Lema de Itô, seguindo os mesmos passos apresentados no livro de Wilmott et al. (2000). Chega-se a

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 P_n^{-1} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} + \frac{\partial F}{\partial S} S - rF = 0 \quad (3)$$

onde:  $F$  é o prêmio,  $\sigma^2$  é a volatilidade,  $S$  é o preço do ativo subjacente,  $t$  é tempo,  $r$  é a taxa de juros,  $P_n^{-1}$  é distribuição Tsallis.

Para o caso de opções de compra sabe-se que de acordo com o modelo de Black-Scholes Generalizado o preço da opção é dado por  $c(S, t)$  que é a solução da equação

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 P_n^{-1} \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} + rS \frac{\partial c}{\partial S} - rc = 0 \quad S > 0, \quad 0 < t < T \quad (4)$$

$$c(S, T) = (S - E)^+ = \max\{S - E, 0\} \quad (\text{Condição Inicial})$$

$$c(0, t) = 0, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} c(S, t) = S \quad (\text{Condição de Contorno})$$

Já para as opções de venda, denota-se por  $p(S, t)$  a solução da equação, que representa o prêmio de uma opção Europeia de venda.

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 P_n^{-1} \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} + rS \frac{\partial p}{\partial S} - rp = 0 \quad S > 0, \quad 0 < t < T \quad (5)$$

$$p(S, T) = (E - S)^+ = \max\{E - S, 0\} \quad (\text{Condição Inicial})$$

$$p(0, t) = E e^{-r(T-t)}, \quad \lim_{S \rightarrow \infty} p(S, t) = 0 \quad (\text{Condição de Contorno})$$

## Formulação Variacional

Definindo-se  $I = [0, S_{max}]$ ,  $Z = \{v \in H^1(I); v(0) = E e^{-rT}, v(S_{max}) = 0\}$  e  $Z_0 = \{v \in H_0^1(I); v(0) = v(S_{max}) = 0\}$ , a formulação variacional para o problema de opções Europeias é expresso por:

**PROBLEMA E:** Para todo  $\tau \in [0, T]$ , encontrar  $p = p(\cdot, \tau) \in Z$  tal que

$$(p, v) + a(p, v) = 0 \quad \forall v \in Z_0 \quad (6)$$

onde

$$p(S, 0) = (E - S)^+; \quad (p, v) = \int_0^{S_{max}} uv ds;$$

$$a(p, v) = \frac{1}{2} \sigma^2 P_n^{-1} \left( S \frac{\partial p}{\partial S} S \frac{\partial v}{\partial S} \right) - (r - \sigma^2 P_n^{-1}) \left( S \frac{\partial p}{\partial S} v \right) + r(p, v)$$

## Aproximação por Elementos Finitos

Para uma construção de uma aproximação por elementos finitos, define-se  $Z_k^h = \{v_h \in C^0(I); v_h|_K \in P_k(K)\}$ , sendo  $Z_k^h \subset Z$  o espaço de elementos de grau  $k > 1$ , em cada elemento  $K$  da triangulação  $T_h$ , onde  $P_k(K)$  é o conjunto dos Polinômios de grau  $\leq k$  definidos em  $K$ .

No problema totalmente discretizado usou-se diferença finita na discretização temporal, mais precisamente aplicou-se o esquema de Euler Implícito e o método de Galerkin para discretização espacial, tem-se

**PROBLEMA TD:** Dado  $n = 1, \dots, N$ , achar  $p_n^h \in Z_k^h$  tal que  $(p_n^h, v_h) = (p_n, v_h)$

$$(\partial_t p_n^h, v_h) + a(p_n^h, v_h) = 0 \quad (7)$$

## OPÇÕES AMERICANAS

Verifica-se que uma opção de venda Americana, tem o prêmio  $P(S, t)$  estritamente maior que o prêmio  $p(S, t)$ , da Europeia equivalente. Isto implica que  $P(S, t)$  não pode ser determinado pela Eq.(5).

Verifica-se que, para cada instante  $t$  os preços que levam ao exercício prematuro forma um intervalo  $[0, S_f]$ , cujo limitante superior será denominado *ponto átimo de exercício*. O ponto  $S_f$  separa o domínio em um segmento onde a opção é exercida e outro em que é conveniente exercê-la posteriormente. Assim, o Problema de precificação de opções Americanas pode ser visto como um problema de fronteira livre em que a fronteira livre é  $S_f = S_f(t)$ .

$$P(S, T) = (E - S)^+$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 P_n^{-1} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP < 0 \quad 0 \leq S < S_f$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 P_n^{-1} \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS \frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \quad S_f < S < \infty$$

$$P(S, t) > (E - S)^+; \quad P(S_f(t), t) = (E - S_f(t))^+; \quad \frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t), t) = -1$$

$$P(S, 0) = (E - S)^+; \quad P(0, t) = E e^{-r(T-t)}; \quad \lim_{S \rightarrow \infty} P(S, t) = 0$$

## Formulação Variacional

Definindo-se  $g(S) = (E - S)^+$ ,  $W = \{v \in H^1(I); v(0) = E e^{-rT}, v(S_{max}) = 0\}$ ,  $W_0 = \{v \in H_0^1(I); v(0) = v(S_{max}) = 0\}$  e  $K = \{v \in W; v(S) \geq g(S) \text{ q.s. em } I\}$ , a formulação variacional para o problema de opções Americanas, é apresentada como,

**PROBLEMA 2A:** Para todo  $\tau \in [0, T]$ , encontrar  $P = P(\cdot, \tau) \in K$  tal que

$$(P, v - P) + a(P, v - P) \geq 0 \quad \forall v \in K \quad (8)$$

$$a(P, v - P) = \frac{\sigma^2}{2} P_n^{-1} \left( S \frac{\partial P}{\partial S} S \frac{\partial (v - P)}{\partial S} \right) - (r - \sigma^2 P_n^{-1}) \left( S \frac{\partial P}{\partial S} (v - P) \right) + r(P, v - P)$$

## Aproximação por Elementos Finitos

Para construção de uma aproximação por elementos finitos, define-se  $W_k^h \subset W$ , como espaço de elementos finitos de classe  $C^0$  e grau  $k$  e o conjunto  $K_h = \{v_h \in W_k^h; v_h(S) \geq g(S), i = 1, 2, \dots, N\}$ , ou seja, a restrição de desigualdade será verificada apenas nos pontos nodais da malha de elementos finitos.

Usando o Método de Galerkin tem-se o problema variacional aproximado, no subespaço de dimensão finita, formulado da seguinte forma

Encontrar  $P : \tau \rightarrow K$  tal que, para todo  $v_h \in K_h^h$ ,  $(P_n^h, v_h) = (P_n, v_h)$

$$\left( \frac{P_n^{h+1} - P_n^h}{\Delta t}, v_h - P_n^{h+1} \right) + a(P_n^{h+1}, v_h - P_n^{h+1}) \geq 0 \quad (9)$$

## Algoritmo de Solução

Para a solução do sistema (9) foi utilizado o método iterativo de Sobre-Relaxação Sucessiva - SOR( $\omega$ ) com projeção sobre o convexo a cada instante de tempo.

Sabe-se que o método iterativo converge para  $0 < \omega < 2$ . Sendo que para  $\omega = 1$  equivalente ao método de Gauss-Seidel, para  $\omega < 1$ , tem-se sub-relaxação e para  $\omega > 1$  tem-se sobre-relaxação. No caso de opções de venda  $g(S) = (E - S)^+$ , para compra  $g(S) = (S - E)^+$ .

## Resultados Numéricos

Os experimentos numéricos que foram feitos têm como o objetivo ilustrar alguns dos aspectos mais importantes relativos à aplicação dos métodos numéricos no mercado financeiro.

**Exemplo 1:** Neste exemplo faz-se um confronto da solução numérica do modelo Generalizado de Black & Scholes, para  $q = 1,0$  (modelo padrão) e  $q = 1,5$ , com o valor de Mercado Financeiro, Mercado de Opções.

Os dados aqui trabalhados são das opções Europeias de compra das ações da *Telebrás PN*, que são negociadas na Bolsa de Valores de São Paulo (BOVESPA), com vencimento em junho de 1997. Foram feitas simulações variando o número de pontos do ativo subjacente da malha de elementos finitos, para analisar o comportamento do método numérico quando se mantém fixos todos os parâmetros da modelagem matemática do problema de precificação de opção. Considerou-se um contrato de opção onde seu preço de exercício é de R\$ 100,00, sua taxa de juros livre de risco, *CDI Over Médio*, aplicada é de 22,12%. A volatilidade implícita anual estava em 36,40%ano.

Acompanha-se as séries dos contratos de opções e verifica-se que as opções do tempo restante até o vencimento em ano é de 0,1905, sendo que para este tempo as ações da *Telebrás PN* (Tel4) estavam cotadas a R\$ 121,99 na bolsa de valores de São Paulo, BOVESPA, e o preço de mercado da opção é de R\$ 26,60.

Foi utilizado o método de elementos finitos, com elementos lineares e as malhas espaciais com 10, 25, 50, 100, 150, 200 nós. Adotou-se a relação de  $\Delta t = O(h^2)$ . Sendo utilizado  $\Delta t$  igual  $3810 \times 10^{-7}$  para a malha de 10 nós do ativo. Para este contrato, com apenas 150 pontos nodais do ativo subjacente, o preço das ações da *Telebrás PN*, tem-se uma boa estimativa do valor de fechamento para a opção de compra como pode ser verificado no gráfico da figura 1, isto é, com 150 pontos nodais o valor numérico encontrado R\$ 26,5976 para  $q = 1,5$ , já para o modelo de Black & Scholes, R\$ 26,5948, em ambos modelos apresentou uma diferença de menor que um centavo para o valor de mercado.

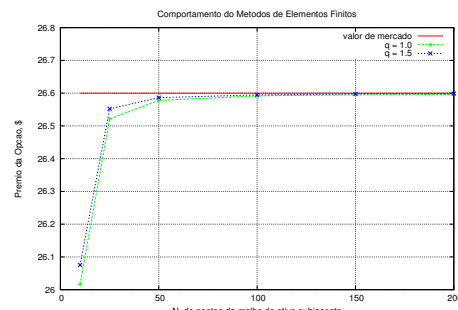


Figura 1. Comportamento do método de elementos finitos segundo variação da malha espacial.

Destaca-se o bom desempenho do modelo na estimativa do valor de fechamento real no mercado financeiro. Deve-se notar que aqui se está fazendo experimentos que não levam em conta alguns fatores aleatórios do mercado, que tenham influência direta na cotação dos ativos subjacentes. Fica assim uma ressalva que nem sempre o valor numérico vai estar próximo do valor de mercado, devido a não consideração de fatores que não foram incluídos na modelagem matemática do problema de precificação de opções.

**Exemplo 2:** Neste exemplo simula-se uma opção Europeia de compra e sua correspondente opção Americana, com  $q = 1,0$  e  $q = 1,5$  onde os parâmetros usados são próximos da realidade de mercado,  $r = 19,75\%$ /ano,  $\sigma = 55,45\%$ /ano e  $\tau = 0,146160$ , com o domínio discretizado em 150 pontos nodais e 15 passos no tempo.

A figura (2) descreve o preço de opção de compra Europeia em função do preço do ativo subjacente para o modelo de Black & Scholes padrão  $q = 1,0$  e para o modelo com  $q = 1,5$ , onde para cada  $q$  a volatilidade escolhida é tal que as opções seja *in-the-money*.

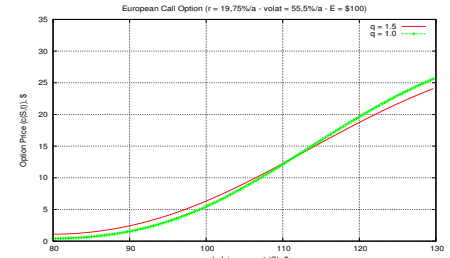


Figura 2. Opção Europeia, para  $q = 1,5$ , e o modelo de Black-Scholes.

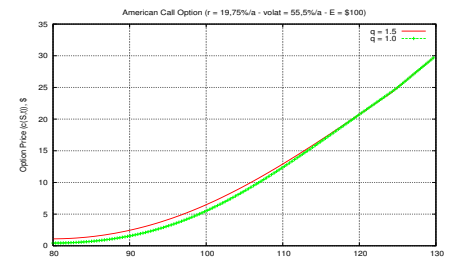


Figura 3. Opção Americana, para  $q = 1,5$ , e o modelo de Black-Scholes.

## CONCLUSÃO

Em resumo, apresenta-se um novo processo para descrever o movimento dos retornos do ativo subjacente, que evolui através do tempo de acordo com um processo análogo ao processo de Wiener, caracterizado por uma distribuição de Tsallis, não-Gaussiana. Verifica-se que segundo Borland (2002) a aproximação por este processo tem uma discreção melhor dos movimentos dos preços dos ativos subjacente no mercado financeiro do que o preço normalmente distribuído como é apresentado por Black & Scholes (1973). De fato, o modelo de Black & Scholes é um caso particular do modelo apresentado nesse trabalho, como visto quando  $q = 1,0$  tem-se o modelo de Black & Scholes. Assim, baseado no processo estocástico apresentado na Eq.(1), encontra-se uma equação generalizada de Black-Scholes, Eq.(3), para precificação de opções.

Neste trabalho, apresenta-se um exemplo de aplicação do método de elementos finitos a um problema de precificação de opções expresso matematicamente por uma equação ou inequação variacional parabólica, cujo operador guarda uma certa relação com o correspondente problema de difusão-convecção-reação com coeficientes variáveis.

Na solução das equações (opções Europeias) ou inequações (opções Americanas) variacionais por métodos de elementos finitos pode-se destacar a flexibilidade deste método em lidar com equações e inequações com coeficientes variáveis como ocorre na modelagem de opções.

As diferenças entre os dois modelos, para  $q = 1,0$  (Black & Scholes) e para  $q = 1,5$ , são aparentadas nos resultados numéricos. Na figura (1) verifica-se que o modelo para  $q = 1,5$  tem valores mais próximos do valor da opção na BOVESPA, o que já era esperado dado que se tem um ajuste melhor para o movimento do preço dos ativos subjacentes pelo Eq.(1) como apresentado por Borland (2002).

## AGRADECIMENTO

Os autores agradecem aos apoios financeiros do CNPq.

## REFERENCES

Black, F. & Scholes, M., 1973. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, vol. 4, pp. 323-338.

Borland, L., 1998. Microscopic dynamics of the nonlinear fokker-planck equation: A phenomenological model. *Physical Review Letters*, vol. 57, n. 6, pp. 57 0634 - 57 0642.

Borland, L., 2002. Option pricing formulas based on a non-gaussian stock price model. *Physical Review Letters*, vol. 89, n. 9, pp. 098701-1 - 098701-4.

Glowinski, R., 1984. *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer Verlag.

Hughes, T., 2000. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, Inc., Mineola, New York.

Merton, R. C., 1973. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, n. 1, pp. 141-183.

Oliveira, S. P., 1997. Métodos numéricos para precificação de opções. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas.

Thomaz, J. C. A., 2004. Métodos numéricos em modelagem de opção. In *XXV Iberian Latin-American Congress Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2004*.

Tsallis, C., 1988. Possible generalization of boltzmann-gibbs statistics. *Journal of Statistical Physics*, vol. 52, pp. 479.

Wilmott, P., Dewynne, J., & Howson, S., 2000. *Option Pricing, Mathematical Models and Computation*. Oxford Financial Press.