INTRODUÇÃO A SISTEMAS DINÂMICOS DISCRETOS

Wellington da Silva
wellingtonmatematica@estudante.prudente.unesp.br

José Ricardo de Rezende Zeni
jrzeni@prudente.unesp.br

unesp

Departamento de Matemática, Estatística e Computação, FCT, UNESP
19060-900, Presidente Prudente, SP

Introdução

Entendemos por *sistema dinâmico* qualquer processo que evolua com o tempo, tais como são encontrados nas mais diversas áreas da Ciência e da atividade humana: Física, Ecologia, Metereologia, Biologia, Economia, e tantas outras disciplinas. A área tem, portanto uma vocação plenamente multidisciplinar. Como exemplos, podemos citar o clima (a atmosfera terrestre, com as suas temperaturas, pressões e umidades), a evolução de uma população num determinado ecossistema, ou ainda a variação das cotações das ações numa bolsa de valores. Em termos matemáticos, é possível modelar muitos desses sistemas apresentando um conjunto X (espaço de fases) e uma transformação $f : X \rightarrow X$ que fornece a lei de evolução do sistema: de um estado x_0 em X o sistema passa ao estado $x_1 = f(x_0)$, que posteriormente passa ao estado $x_2 = f(x_1)$, e assim sucessivamente. A sucessão $(x_n)\_\{n \rightarrow 0\}$ é designada a *órbita* de x_0. Um dos principais objetivos da teoria dos sistemas dinâmicos consiste em tentar descrever o comportamento das órbitas, pelo menos em termos assintóticos.

Para isso são usados métodos das mais diversas áreas da Matemática, tais como a Geometria, Análise, Álgebra, Topologia e Probabilidade.

Assim, sistemas dinâmicos discretos, abreviados por SDD, são sistemas que dependem de uma variável discreta, usualmente identificada com o tempo e, que são definidos por um conjunto de equações recursivas (também ditas equações a diferenças).

Metodologia e Resultados

Uma equação de diferenças de ordem k é uma equação do tipo

$$g(a[t], a[t-1], a[t-2], ..., a[t-k], t) = 0$$

onde g é uma função de k+1 variáveis reais e uma variável discreta t. considerando que a equação pode ser resolvida para o termo de ordem superior, a[t], podemos escrever

$$a[t] = f(a[t-1], a[t-2], ..., a[t-k], t)$$

indicando que o termo a[t] é uma função, indicada por f, dos k termos anteriores e possivelmente de t, uma variável discreta, $t \in N$. Dizemos que a equação acima é uma definição recursiva de a[t].

Uma solução desta equação é uma seqüência a cujos termos a[t] satisfazem a equação acima, exceto os k primeiros termos que podem ser escolhidos arbitrariamente. Nas aplicações, estes termos são fixados de acordo com algumas condições iniciais (problema de valor inicial, abreviado por PVI).

A equação é dita linear se f for uma função linear das variáveis a[t-1], a[t-2], ..., a[t-k], caso contrário a equação é dita não linear. Por exemplo, a equação abaixo descreve a forma genérica de uma equação linear de Segunda ordem

$$a[t] = p[t].a[t-1] + q[t].a[t-2] + c[t]$$

Onde p[t], q[t], c[t] são funções da variável discreta t. caso os coeficientes p, q e c não dependam de t a equação é dita linear de 2ª ordem com coeficientes constantes.

Quando o termo independente, indicado por c[t], for nulo, a equação é dita homogênea.

Um sistema dinâmico discreto é um sistema de equações de diferenças. Por exemplo, o sistema linear homogêneo de 1ª ordem com coeficientes constantes definido abaixo:

$$\begin{cases} a[t] = p.a[t-1] + q.b[t-1] \\ b[t] = r.a[t-1] + s.b[t-1]. \end{cases}$$

Uma solução deste sistema são duas seqüências, a e b, cujos termos satisfazem a equação acima, exceto os termos iniciais, a[0] e b[0], que são arbitrários ou fixados pelas condições iniciais.

Uma solução analítica (ou fórmula geral) para um sistema dinâmico discreto é um modo de descrever a(s) seqüência(s) solução(ões) como função de t e dos termos iniciais, sem utilizar recursão. Uma solução analítica é um instrumento poderoso para investigar um sistema dinâmico discreto. Ela permite obter informações mais facilmente que a fórmula recursiva, e também responder questões que seriam proibitivas apenas com o conhecimento da definição recursiva do sistema.

Um ponto de destaque sobre sistemas lineares é a possibilidade de se obter uma solução analítica para esta classe de sistema. O fato básico é a solução analítica para sistemas lineares homogêneos com coeficientes constantes. A solução para sistemas não homogêneos pode ser obtida a partir da solução do sistema homogêneo, mesmo quando o termo não homogêneo é variável (por exemplo, pelo método dos coeficientes a determinar).

As *Equações de Primeira Ordem* são de grande importância devido ao fato de que equações de ordem superiores podem ser reduzidas a equações de primeira ordem. Em uma equação de primeira ordem o valor de cada termo a[t] depende apenas do termo anterior a[t-1] e possivelmente da variável discreta t, podendo ser escrita como

$$a[t] = f(a[t-1],t).$$

Discutiremos a equação de 1ª ordem linear, definida por

$$a[t] = q[t].a[t-1] + p[t],$$

sendo as seqüências q[t] e p[t] os coeficientes da equação. Métodos para resolver esta equação são bem conhecidos, tanto no caso de coeficientes constantes como variáveis. Além das diversas aplicações existentes, o estudo de equações lineares fornece alguns conceitos básicos para o estudo de equações não lineares, como os conceitos de solução de equilíbrio e comportamento assintótico.

Equações Lineares com Coeficientes Constantes (ELCC)

A equação linear de 1ª ordem com coeficientes constantes (ELCC) é definida por:

$$a[t] = q.a[t-1]+d$$

O coeficiente d é dito o termo não-homogêneo, quando d=0 a equação é dita homogênea.

Antes de apresentar a fórmula geral para a equação acima, é conveniente discutir alguns resultados que podem ser obtidos diretamente da definição recursiva. Esta estratégia é relevante para equações para as quais não se conhece a fórmula geral, como em geral acontece com equações não lineares.

Valor de equilíbrio: o valor de equilíbrio, indicado por e, é solução da equação e = e.q+d. Para $q \neq 1$, a solução é única e dada por: e = d/(1-q). Quando q=1 e $d \neq 0$, não existe valor de equilíbrio.

Em geral, nas aplicações, a constante q é positiva. Os próximos resultados tratam desse caso.

Majorantes: para q>0 e $q \neq 1$, a seqüência solução da ELCC de 1ª ordem é

- limitada superiormente se a[0]<e, isto é, a[t]<e, para todo $t \in N$,
- limitada inferiormente se a[0]>e, isto é, a[t]>e, para todo $t \in N$.

Estudo do Crescimento: para q>0, a seqüência solução da ELCC de 1ª ordem é

- crescente se a[0].q+d>a[0], isto é, a[t]>a[t-1], para todo $t \in N$,
- decrescente se a[0].q+d<a[0], isto é, a[t]<a[t-1], para todo $t \in N$

Corolário: para q>0, a seqüência solução da ELCC não pode oscilar, isto é, ser crescente uma certa faixa de valores de t e decrescente em outra faixa.

Solução Analítica (ou fórmula geral): caso $q \neq 1$, a seqüência solução da ELCC pode ser escrita como:

$$a[t] = a[0].q^t+d.(q^{t-1})/(q-1), \text{ (para } t>0)$$

A solução de uma equação linear não homogênea é a soma de duas parcelas: a primeira parcela é solução geral (PVI) para a equação homogênea (d=0), enquanto que a Segunda parcela é uma solução particular da equação não homogênea. Observemos que o segundo termo do lado direito é a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão q e valor inicial igual a d. de fato, usando a equação a[t] = q.a[t-1]+d, podemos escrever:

$a[1] = a[0].q+d$

$a[2] = a[1].q+d = a[0].q^2+2.d$

...

$a[t] = a[t-1].q+d = a[0].q^t+d.q^{t-1}+d.q^{t-2}+...+d.q+d$

Comportamento Assintótico: para calcular o limite de a[t] quando $t \rightarrow +\infty$ é conveniente reescrever a solução da ELCC, de tal modo a destacar a dependência exponencial da solução com o tempo, como mostrado abaixo:

$$a[t] = k.q^t+e \qquad \text{(para } t>0),$$

sendo e=d/(1-q) é o valor de equilíbrio e k=a[0]-e. Assim temos os seguintes resultados:

- se $0<|q|<1$, então $a[t] \rightarrow e$, isto é, a solução tende ao valor de equilíbrio,
- se $|q|>1$, então $|a[t]| \rightarrow \infty$ (limite no infinito).

Referências bibliográficas

[1] BOYCE, Willian E. e DIPRIMA, Richard C., *Equações Diferencias Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 6ª edição, editora LTC, 1998.
[2] LIMA, Elon L., *Curso de Análise*, volume 1, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1976.
[3] MORGADO, A. C., WAGNER, E., ZANI, S.C., *Progressões e Matemática Financeira*, IMPA/SBM (sociedade Brasileira de Matemática), 1993