

# Investigação das equações de Navier-Stokes e conservação da massa

**Mauro Rizzoni Silveira<sup>1</sup>, Viviana Cocco Mariani<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Graduação em Engenharia Química

<sup>2</sup>Pós-Graduação em Engenharia Mecânica – PPGEM

Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR

Rua Imaculada Conceição, 1155, 80215-901, Curitiba, PR

E-mail: mrsilveira2000@brturbo.com.br, viviana.mariani@pucpr.br

**Resumo.** Este artigo apresenta uma investigação analítica e numérica da solução das equações de Navier-Stokes e conservação da massa modelando situações de escoamento de fluidos unidimensional, sendo assim algumas simplificações das equações completas foram adotadas. A solução analítica é obtida através do método das características e a solução numérica é obtida via método das diferenças finitas e volumes finitos e comparada com a solução analítica. Usando o método dos volumes finitos foram analisados os resultados obtidos com as interpolações Diferença Central, Upwind e Quick e feita uma averiguação da análise do refino da malha computacional utilizada. Algumas situações investigadas no presente trabalho são apenas teóricas e na prática talvez nem aconteçam.

## 1. Introdução

A interação entre corpos (avião, navio, carros, edifícios, vasos sanguíneos, difusores radiais, ...) e fluidos (ar, água, óleo, sangue, gases, ...) é descrita pela Mecânica dos Fluidos, especificamente por um conjunto de equações diferenciais parciais, denominadas equações de Navier-Stokes. Essas equações surgem da aplicação da segunda Lei de Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}$ , onde  $m$  é a massa e  $\vec{a}$  é o vetor aceleração, a um elemento de fluido de massa infinitesimal,  $dm$ , que escoar com certa velocidade  $\vec{V}$  no qual age a força de gravidade  $\vec{F}_g$  e as forças de superfície  $\vec{F}_s$  (força de pressão e atrito), surgindo a equação,

$$\vec{F}_g + \vec{F}_s = dm \frac{d\vec{V}}{dt} \quad (1)$$

O desenvolvimento da segunda lei de Newton, equação (1) resulta nas equações de Navier-Stokes, que na forma compacta escreve-se,

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho g \vec{e}_g - \vec{\nabla} p + \frac{\mu}{3} \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2)$$

onde  $\vec{V} = u\hat{i} + v\hat{j} + w\hat{k}$  é o vetor velocidade, apresentado neste documento em coordenadas

cartesianas,  $g$  é o módulo da aceleração da gravidade,  $p$  é a pressão,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica associada as forças de atrito e  $\rho$  é a densidade do fluido. Assim, resolver as equações de Navier-Stokes resume-se em determinar as seguintes funções soluções:  $u(t, x, y, z)$ ,  $v(t, x, y, z)$ ,  $w(t, x, y, z)$ ,  $p(t, x, y, z)$  e  $\rho(t, x, y, z)$ , onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são as componentes do vetor velocidade nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente [1].

Assim, tem-se cinco variáveis e apenas três equações, logo são necessárias duas outras equações provenientes dos princípios de conservação de massa e energia, segunda Lei de Termodinâmica para o sistema ficar completo. De uma forma mais genérica a equação (2) pode ser organizada como,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho \cdot v \cdot \phi) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \cdot w \cdot \phi) = f + \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \cdot \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \Gamma \cdot \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \Gamma \cdot \phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (3)$$

onde  $\phi = u$ ,  $v$  ou  $w$  para a equação da quantidade de movimento na direção  $x$  (axial); na direção  $y$  (radial) ou na direção  $z$ , respectivamente,  $\phi = I$  para a equação da conservação da massa e  $\phi = T$  para a equação da energia,  $\rho$  é a densidade do fluido e  $f$  é o termo fonte.

Como até o momento não foi apresentada uma solução analítica das equações de Navier-Stokes na forma completa tridimensional, então os físicos, químicos e engenheiros que utilizam as mesmas recorrem a dois procedimentos: solução numérica ou experimentos, sendo extenso o número de trabalhos encontrados sobre o assunto ([2], [3]).

Através dos exemplos e citações expostos anteriormente, nota-se a importância da investigação das equações de Navier-Stokes, seja analiticamente ou numericamente, já que estas solucionam problemas presentes no nosso dia a dia. Assim, este trabalho tem como objetivo principal estudar, analisar e resolver as equações de Navier-Stokes unidimensional.

## 2. Equações Simplificadas

Para o primeiro caso investigado considerou-se a pressão constante, sem interação de forças externas ( $f = 0$ ), escoamento unidimensional, viscosidade nula ( $\mu = 0$ ) e  $\phi = u$  e  $I$ . Assim, em regime transiente e usando algumas condições iniciais tem-se:

<sup>1</sup> Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) = 0; \text{ com } u(x,0) = x \text{ ou } 1-x \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0; \text{ com } \rho(x,0) = \rho_0 \end{cases} \quad (4)$$

O segundo caso investigado é semelhante ao primeiro, exceto que introduziu-se a equação para  $\phi = v$ .

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v u) = 0; \text{ com } u(x,y,0) = x \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v v) = 0; \text{ com } v(x,y,0) = y \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0; \text{ com } \rho(x,y,0) = \rho_0 \end{cases} \quad (5)$$

O método das características é um método analítico aplicável em sistemas de equações diferenciais parciais quase-linear, que são transformadas em um conjunto de equações diferenciais ordinárias (EDOs) que definem as características, e um conjunto de EDOs que descrevem como a solução varia ao longo de qualquer característica específica [4].

O método das diferenças finitas (MDF) consiste em substituir as derivadas na equação por aproximações numéricas de mesma ordem de aproximação utilizando a série de Taylor. Para equações diferenciais de primeira e segunda ordens pode-se utilizar as seguintes aproximações, no tempo e/ou no espaço [5], conforme apresentado na Figura 1, para o ponto nodal central  $i$ .

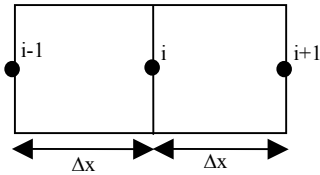


Figura 1: Discretização para o MDF no espaço.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} \quad (7)$$

onde as expressões na equação (6) são denominadas *forward-difference* e a primeira expressão na equação (7) *backward-difference*. Ao substituir estas aproximações na equação diferencial, obtém-se uma equação algébrica que envolve valores, por exemplo, da função  $u(x, t)$  em alguns pontos.

### 3. Resultados Parciais

Após a manipulação algébrica das equações diferenciais parciais apresentadas em (4) com a condição inicial  $u(x, 0) = x$  obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ u(x,0) = x \\ \rho(x,0) = \rho_0 \end{cases} \quad (8)$$

Resolvendo pelo método das características obtém-se a solução analítica,

$$u(x,t) = \frac{x}{t+1} \quad (9)$$

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_0}{t+1} \quad (10)$$

Usando o MDF obtém-se para a velocidade na direção  $x$  e conservação da massa unidimensional, respectivamente, as seguintes equações para os pontos nodais  $i = 1$  até  $n-1$ , para estas avaliações foram usadas a *forward-difference*.

$$u_{i,j+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (-u_{i+1,j} u_{i,j} + u_{i,j}^2) + u_{i,j} \quad (11)$$

$$\rho_{i,j+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (2\rho_{i,j} u_{i,j} - \rho_{i+1,j} u_{i,j} - \rho_{i,j} u_{i+1,j}) + \rho_{i,j} \quad (12)$$

Para a avaliação no ponto nodal  $n$  foi utilizada a avaliação *backward-difference* resultando em:

$$u_{i,j+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_{i-1,j} u_{i,j} - u_{i,j}^2) + u_{i,j} \quad (13)$$

$$\rho_{i,j+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x} (-2\rho_{i,j} u_{i,j} + \rho_{i-1,j} u_{i,j} + \rho_{i,j} u_{i-1,j}) + \rho_{i,j} \quad (14)$$

Graficamente as soluções analítica e numérica do primeiro caso investigado no presente trabalho são iguais. As Figuras 2 e 4 apresentam os resultados obtidos para a velocidade  $u(x, t)$  e a densidade  $\rho(x, t)$ , onde nota-se que a velocidade e a densidade são inversamente proporcionais ao tempo, mantido um ponto fixo  $x_0$ , isto é, quando o tempo aumenta a velocidade e a densidade diminuem. A densidade não varia com a posição já a velocidade aumenta ao longo do espaço. Fisicamente o fluido está tentando parar com o passar do tempo, isto até pode acontecer devido ao fato de que neste escoamento desconsiderou-se as forças externas.

A Figura 3 ilustra as isolinhas de velocidade  $u$ , onde percebe-se novamente o que foi discutido no parágrafo anterior.

A Figura 5 ilustra o perfil de velocidade e da densidade com o passar do tempo. Foi escolhida a posição fixa  $x = 0,5$  para avaliar o decrescimento da velocidade com o aumento do tempo, já a densidade não depende da posição apenas do tempo e é decrescente com

o tempo. Nesta figura percebe-se que a partícula escolhida tende a parar com o passar do tempo.

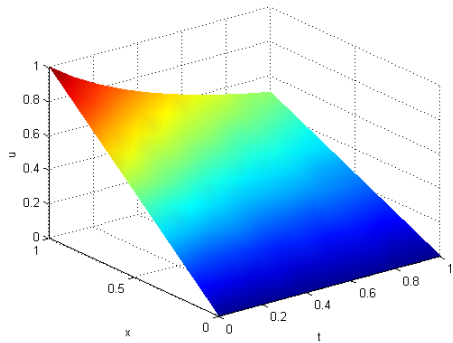


Figura 2: Variação da velocidade  $u$  com  $x$  e  $t$ .

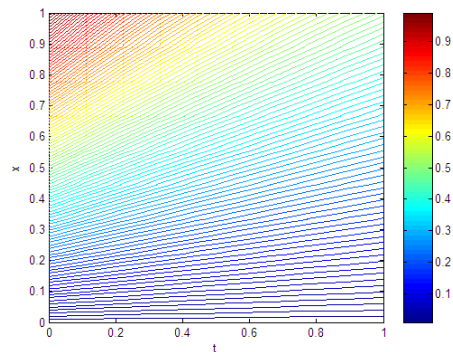


Figura 3: Isolinhas da velocidade  $u$ .

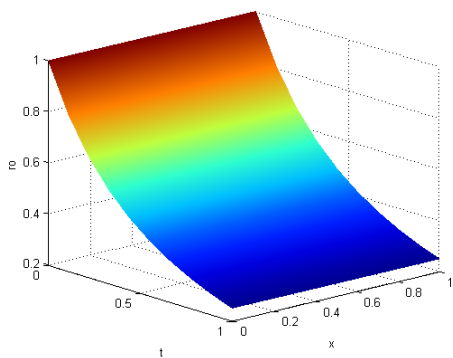


Figura 4: Variação da densidade com  $x$  e  $t$ .

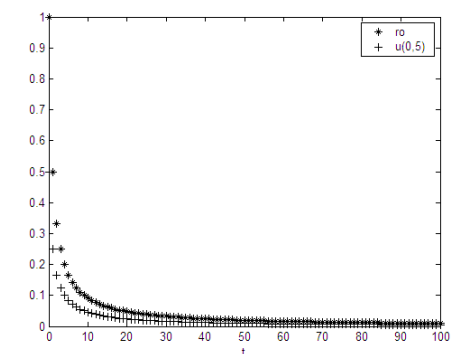


Figura 5: Perfil da velocidade em  $x = 0,5$  e da densidade ao longo do tempo.

Agora resolvendo a equação (4) para a condição inicial  $u(x, 0) = 1 - x$  obteve-se pelo método das características a seguinte solução,

$$u(x,t) = \frac{1-x}{1-t} \quad (15)$$

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_0}{1-t} \quad (16)$$

As equações (15) e (16) apresentam uma descontinuidade no tempo,  $t = 1$ . Logo a representação gráfica da solução analítica e numérica foi executada levando em conta esta descontinuidade. A solução numérica não obteve a mesma solução da analítica, pequenas diferenças são percebidas, conforme apresentado nas figuras que seguem.

As Figuras 6 a 9 ilustram resultados obtidos através da solução analítica do segundo caso investigado no presente trabalho, onde percebe-se nas Figuras 6 e 7 que fixando uma posição,  $x = x_0$ , a velocidade aumenta com o passar do tempo e fixando um tempo,  $t = t_0$ , a velocidade diminui ao longo do espaço. O comportamento da densidade é apresentado na Figura 8 a qual aumenta com o passar do tempo e é independente da posição espacial. Neste caso nota-se que a velocidade aumenta com o aumento da densidade conforme ilustrado na Figura 9.

Na Figura 9 nota-se que tanto a velocidade na direção  $x$  quanto a densidade, para tempos maiores que 1, aumentam com o decorrer do tempo, nesta figura escolheu-se novamente como referência a posição  $x = 0,5$  e observa-se o aumento da velocidade e da densidade com o tempo, apesar de ambas serem negativas, elas tendem para zero.

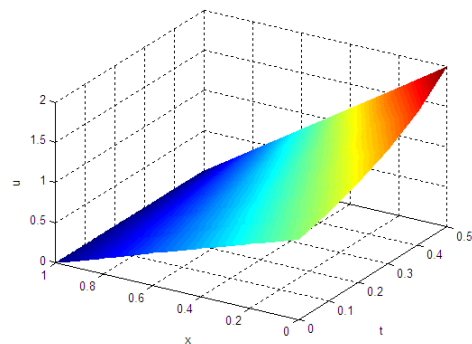


Figura 6: Variação da velocidade  $u$  com  $x$  e  $t$ .

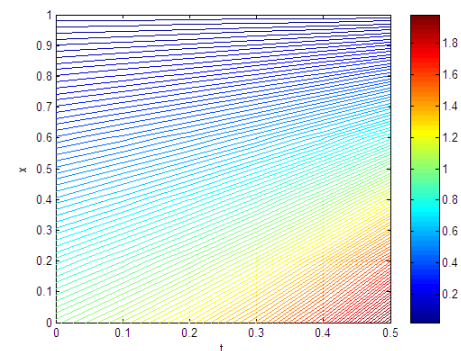


Figura 7: Isolinhas da velocidade  $u$ .

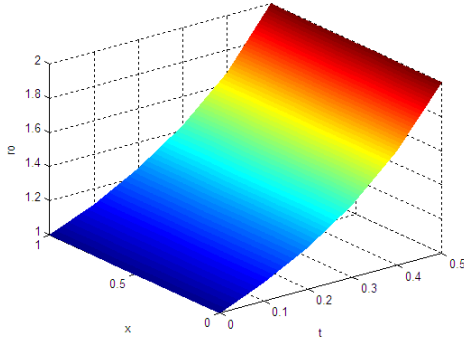


Figura 8: Variação analítica da densidade com  $x$  e  $t$ .

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_0}{(t+1)^2}. \quad (19)$$

Analisando a equação (17) nota-se que a velocidade  $u$  é a mesma obtida para o caso 1 investigado no presente trabalho, enquanto a velocidade  $v$  tem o mesmo comportamento da velocidade  $u$ , exceto que sua variação é com a posição  $y$  e não com  $x$ . Já a densidade, apresentada na Figura 10, decresce com o tempo e independe da variação da posição com  $x$  ou  $y$ . A Figura 11 mostra que o decrescimento da densidade é mais significativo que o decrescimento da velocidade com o passar do tempo.

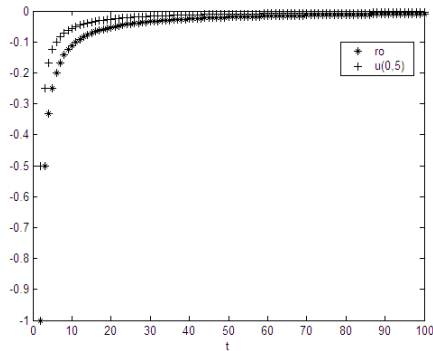


Figura 9: Perfil da velocidade em  $x = 0,5$  e da densidade ao longo do tempo.

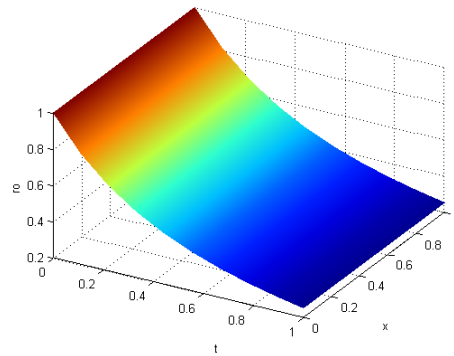


Figura 10: Variação da densidade com  $x$  e  $t$ .

A solução numérica pelo MDF é igual a que foi apresentada nas equações (11) a (14), exceto que a condição inicial para a velocidade  $u$  deve ser alterada no momento da implementação do programa computacional. Porém na solução numérica a densidade obtida numericamente teve valores inferiores aos obtidos analiticamente, conforme apresentado nas Figuras 8 e 10. Tal fato não pode ser explicado.

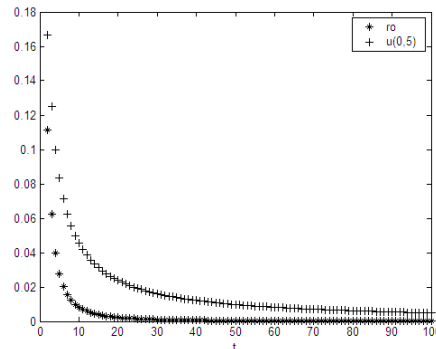


Figura 11: Perfil da velocidade em  $x = 0,5$  e da densidade ao longo do tempo.

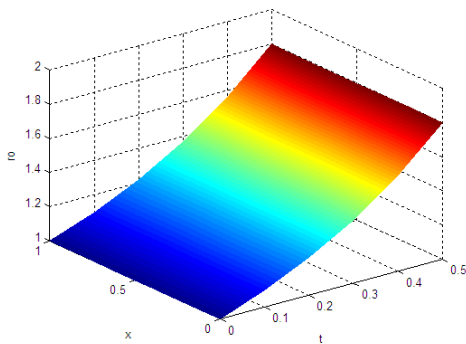


Figura 10: Variação numérica da densidade ( $x, t$ ).

Resolvendo a equação (5) a solução obtida analiticamente é:

$$u(x,t) = \frac{x}{t+1} \quad (17)$$

$$v(x,t) = \frac{y}{t+1} \quad (18)$$

No quarto caso investigado considerou-se a pressão constante, sem interação de forças externas ( $f = 0$ ), escoamento unidimensional, viscosidade constante e densidade constante,  $u = 0,1$  ou  $2,5$  m/s e  $\phi = u$  e  $1$  [2]. Assim em regime permanente a equação (3) fica:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u \cdot \phi) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \Gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho \cdot u) = 0 \quad (21)$$

Resolvendo analiticamente as equações para  $\phi$  tendo como condições de contorno  $\phi(x=0) = \phi_0$  e  $\phi(x=L) = \phi_L$ , obtém-se:

$$\phi(x) = \left[ \frac{\exp(\rho u x / \Gamma) - 1}{\exp(\rho u L / \Gamma) - 1} \right] [\phi_L - \phi_0] + \phi_0 \quad (22)$$

O Método dos Volumes Finitos (MVF) foi utilizado para obter a solução numérica deste problema. Vamos partir da equação diferencial na forma conservativa e integrá-la sobre o volume elementar no espaço  $x$ . Usando a malha estruturada apresentada na Figura 12 tem-se equações discretas diferentes para os volumes 1 e 5, porque o espaçamento destes volumes com as faces oeste e leste, respectivamente, tem a metade do comprimento dos volumes internos a malha.

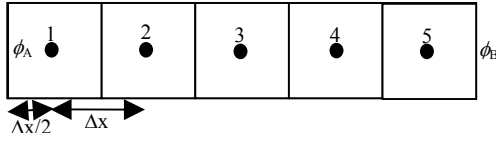


Figura 12: Discretização para o MVF no espaço.

Assim, os volumes 1 e 5 terão coeficientes  $A_w$  e  $A_e$  respectivamente diferenciados, bem como o termo fonte será diferente dos pontos nodais internos na malha. São estes dois volumes os responsáveis neste problema pelo transporte das condições de contorno para o interior do domínio. Três interpolações diferentes foram usadas para obter a variável  $\phi$  nas faces dos volumes de controle: Diferença Central, Upwind e QUICK, apresentadas nas Tabelas 1, 2 e 3, respectivamente [2].

Tabela 1: Interpolação Diferença Central.

Nós	$A_w$	$A_e$	$S_p$	$S_u$
1	0	$D-F/2$	$-(2D+F)$	$(2D+F)\phi_0$
2,3,4	$D+F/2$	$D-F/2$	0	0
5	$D+F/2$	0	$-(2D-F)$	$(2D-F)\phi_L$

Tabela 2: Interpolação Upwind.

Nós	$A_w$	$A_e$	$S_p$	$S_u$
1	0	$D$	$-(2D+F)$	$(2D+F)\phi_0$
2,3,4	$D+F$	$D$	0	0
5	$D+F$	0	$-2D$	$2D\phi_L$

Para as duas interpolações anteriores tem-se o coeficiente nodal central como  $A_p = A_e + A_w - S_p$ . Assim a equação geral para cada o volume de controle  $i$  (ou  $P$ ) será:

$$A_p \phi_p = A_e \phi_E + A_w \phi_W + S_u \quad (23)$$

A solução da equação (23) pode ser obtida através de um método iterativo como Gauss-Seidel.

Para a interpolação QUICK o coeficiente nodal central é  $A_p = A_{ww} + A_w + A_e - S_p$ . Assim a equação geral para cada nó  $i$  (ou  $P$ ) será:

$$A_p \phi_p = A_e \phi_E + A_w \phi_W + A_{ww} \phi_{WW} + S_u \quad (24)$$

Tabela 3: Interpolação QUICK.

Nós	$A_{ww}$	$A_w$	$A_e$
1	0	0	$D + D_0/3 - 3F/8$
2	0	$D + F$	$D - 3F/8$
3, 4	$-F/8$	$D + 7F/8$	$D - 3F/8$
5	$-F/8$	$D + D_L/3 + 6F/8$	0
		$S_p$	$S_u$
1		$-(8D_0/3 + 2F/8 + F_0)$	$(8D_0/3 + F_0 + 2F/8)\phi_0$
2		$F/4$	$-F\phi_0/4$
3, 4		0	0
5		$-(8D_L/3 - F_L)$	$(8D_L/3 - F)\phi_L$

As soluções analítica e numérica foram obtidas para  $L = 1\text{m}$ ,  $\rho = 1\text{kg/m}^3$ ,  $\Gamma = 0,1\text{Kg.s/m}$  e  $u = 0,1$  (caso 1) ou  $2,5\text{ m/s}$  (caso 2) são apresentadas nas figuras que seguem. Na Figura 13 apresenta-se a solução da velocidade  $u$  para uma malha formada por 5 volumes de controle (conforme ilustrada na Figura 12) via MVF usando a interpolação Diferença Central (DC) juntamente com a solução analítica para o caso 1. Percebe-se que a interpolação DC obteve um bom desempenho acompanhando a solução analítica. Na Figura 14 apresenta-se a solução analítica e numérica para o caso 2 com uma malha de 5 volumes de controle. A solução numérica só foi obtida através da sub-relaxação 0,5; ou seja, o método SOR foi utilizado para obter a solução do sistema resultante da discretização e a solução é oscilante e difere da solução analítica. A Figura 15 apresenta a solução numérica análoga a Figura 14 utilizando 20 volumes de controle. Nesta situação com o método de Gauss-Seidel a solução é obtida com apenas 13 iterações.

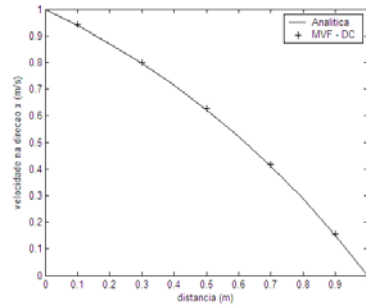


Figura 13: Comparação da solução analítica e DC para o caso 1 com 5 volumes de controle.

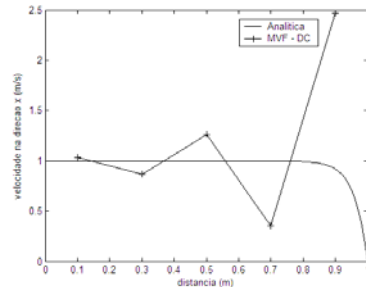


Figura 14: Comparação da solução analítica e DC para o

caso 2 com 5 volumes de controle.

Nas Figuras 16 e 17 apresenta-se os resultados obtidos pela interpolação Upwind, no caso 2 foi necessário novamente utilizar o método SOR para obter a convergência, contudo aqui a solução numérica aproximou-se da analítica. Nas figuras 18 e 19 apresenta-se os resultados obtidos via interpolação QUICK onde nota-se em ambos os casos investigados uma aproximação da solução numérica com a analítica sem a necessidade do fator de sub-relaxação.

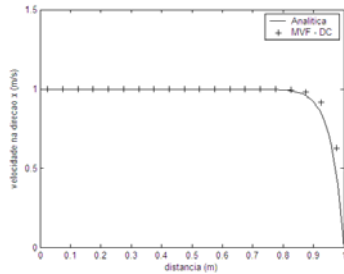


Figura 15: Comparação da solução analítica e DC para o caso 2 com 20 volumes de controle.

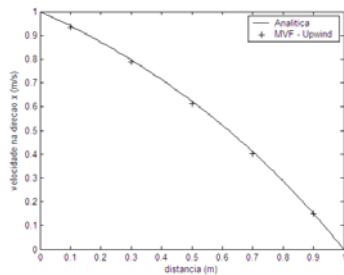


Figura 16: Comparação da solução analítica e Upwind para o caso 1 com 5 volumes de controle.

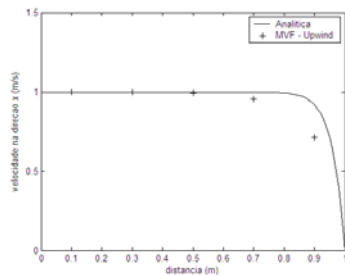


Figura 17: Comparação da solução analítica e Upwind para o caso 2 com 5 volumes de controle.

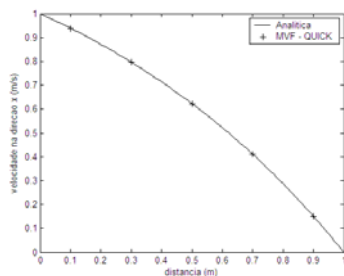


Figura 18: Comparação da solução analítica e QUICK para o caso 1 com 5 volumes de controle.

A Figura 20 mostra um comparativo entre as três interpolações adotadas para uma malha formada por 20 volumes de controle, a DC convergiu com 13 iterações, Upwind com 62 iterações e QUICK com 36 iterações para a precisão  $10^{-5}$ , contudo percebe-se na figura que a interpolação QUICK é a que mais se aproxima da solução analítica.

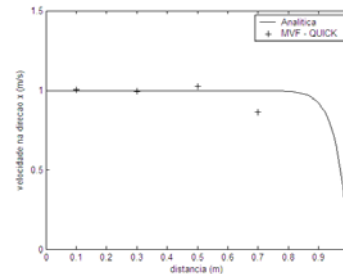


Figura 19: Comparação da solução analítica e QUICK para o caso 2 com 5 volumes de controle.

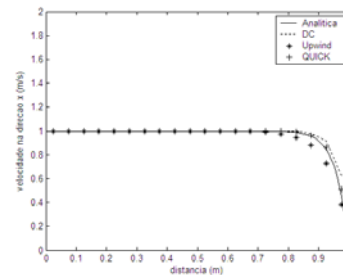


Figura 20: Comparação da solução analítica e numérica para o caso 2 com 20 volumes de controle.

#### 4. Conclusões

Neste trabalho investigamos as equações de Navier-Stokes unidimensional com várias simplificações e notamos que a solução tanto analítica quanto numérica destas equações é difícil de ser obtida, assim como as simplificações adotadas podem resultar em soluções que não são fisicamente corretas. Logo, estas equações já na forma simplificada inspiram muito cuidado que dirá na sua forma completa.

#### Referências

- [1] L. Caffarelli, R. E. Kohn, L. Nirenberg, "Partial Regularity of Suitable weak Solutions of the Navier-Stokes Equations", *Comm. Pure & Appl. Math.* 35 1932, 771-831.
- [2] H. K. Versteeg, W. Malalasekera, "An Introduction to Computational Fluid Dynamics", Longman Scientific & Technical, 1995.
- [3] C. R. Maliska, "Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, LTC, Rio de Janeiro, 2005.
- [4] K. W. Morton, D. F. Mayers, "Numerical Solution of Partial Differential Equations", Cambridge, 2004.
- [5] G. D. Smith, "Numerical Solution of Partial Differential Equations – Finite Difference Methods", 3ª ed., Oxford, 2003.
- [6] J. H. Ferziger, M. Peric, "Computational Methods for

Fluid Dynamics”, 3<sup>a</sup> ed., Springer, 2002.