Comparação entre as aproximações de Born e Rytov

Julian Simó
Universidade de Campinas
Bolsista SAE/Unicamp

Jörg Schleicher
Universidade de Campinas
Orientador

Sísmica de reflexão

- Obetivo: criação de uma imagem *aproximada* do subsolo
- Método: ondas acústicas, geradas na superfície, se propagam no subsolo e retornam para serem registradas

Formulação do problema

- Equação que governa o fenômeno estudado: equação da onda acústica,

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (1)$$

- Modelo em estudo: c_0 é a velocidade de referência; c_1, a velocidade procurada.

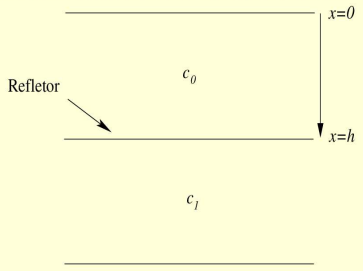

Figura 1 - Modelo

Resolve-se (1), reformulando-a como uma equação integral não linear. Escreve-se c_1 como

$$\frac{1}{c_1^2(x)} = \frac{1+\alpha(x)}{c_0^2(x)}. \qquad (2)$$

Linearização do problema: aproximações de Born e Rytov

Dois problemas

- Problema direto: encontrar o campo de onda u quando se conhece c_0 e c_1. Divide-se o campo de onda u em duas partes:
  - o campo incidente u_I
  - o campo refletido u_S

  Já supondo-se a perturbação α muito pequena, obtem-se

$$u_S(x_g, x_s, \omega) = R_* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{c_0^2(x)}\alpha(x) \times \qquad (3)$$
$$\times\, g(x, x_s, \omega) g(x, x_g, \omega)\, dx\,.$$

  Na fórmula anterior, usamos

☞ $R_* = R$ para a aproximação de Born;

☞ $R_* = \frac{R}{1+R}$ para a aproximação de Rytov.

- Problema inverso: encontrar c_1 quando se conhece u. Necessário encontrar, primeiramente, a perturbação α

$$\alpha(x) = -\frac{4}{\pi c_0}\int_{-\infty}^{+\infty} u_S(0,\omega)\, e^{-\frac{2i\omega}{c_0}x}\, d\omega \qquad (4)$$

Solução analítica

Para o modelo estudado, a solução analítica para o coeficiente de reflexão R é dada por

$$R = \frac{c_1 - c_0}{c_1 + c_0}. \qquad (5)$$

Limitação em banda

- Dados do mundo real não apresentam faixa infinita de freqüências.
- Duas implicações:

☞ necessário inserir uma *função filtro* na solução de (1), para levar em conta tal limitação

☞ impossível recuperar o perfil exato. Ao invés de obter uma função degrau,

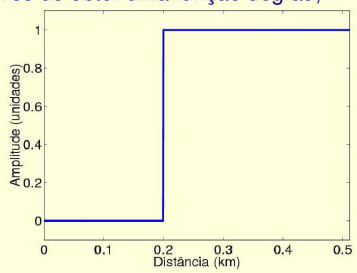

Figura 2 - u_S sem limitação de banda

obtemos

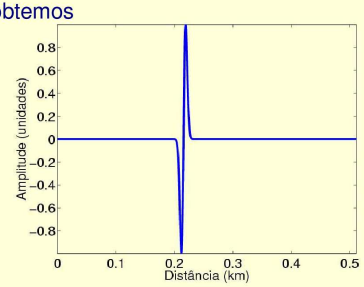

Figura 3 - u_S limitado em banda

- Conclusão: perda de energia torna a resposta irreconhecível.
- Solução: introduzir um operador de derivação, obtendo a função de refletividade

$$\beta_{L_*} = -\frac{4R_*}{\pi c_0}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{2i\omega\frac{(h-x)}{c_0}}\, d\omega\,. \qquad (6)$$

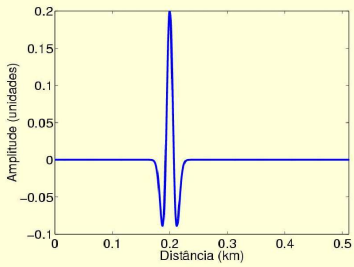

Figura 4 - Refletividade

Roteiro para inversão

- Obter uma estimativa do coeficiente de reflexão R
- Usar as seguintes fórmulas, para as aproximações de Born e Rytov, respectivamente

$$\alpha_B(x) = -4R\,, \qquad (7)$$
$$\alpha_R(x) = \frac{-4R}{1+R}. \qquad (8)$$

- Recuperar a velocidade c_1 a partir da seguinte fórmula

$$c_1 = \frac{c_0}{1 - \frac{\alpha_*}{2}}, \qquad (9)$$

onde se substitui α_* por α_B ou α_R, conforme necessário.

Comparação

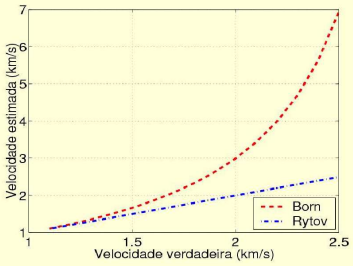

Figura 5 - Born *versus* Rytov

Conclusões

☞ Perturbação é determinada exatamante pela fórmula de Rytov,

$$\alpha_R(x) = -\frac{4R}{1+R} = -\frac{2\Delta c}{c_1}. \qquad (10)$$

☞ Fórmula de Born introduz erro,

$$\alpha_B(x) = -4R \approx -\frac{2\Delta c}{c_1}. \qquad (11)$$

⋆ Aproximação de Rytov é superior.

Referências

N. Bleistein, J.K. Cohen, J.W. Stockwell, Jr., *Mathematics of multidimensional seismic imaging, migration, and inversion*, New York: Springer

E.O. Brigham, *Fast Fourier Transform and Its Applications*, Prentice Hall