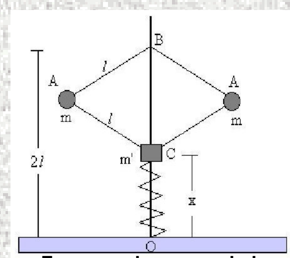
# Dinâmica do Regulador Centrífugo

**Uziel Paulo da Silva Márcio José Horta Dantas**
**Faculdade de Matemática - Universidade Federal de Uberlândia-UFU**
**38400-902, Uberlândia, MG**
**E-mail:**
**uzielpaulo@yahoo.com.br, marcio @ufu.br**

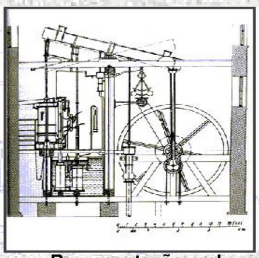
O regulador centrífugo é um instrumento de ação direta, isto é, é um dispositivo que acoplado a uma máquina tem por finalidade estabilizar o funcionamento desta. Mas vários problemas aparecem na construção do regulador centrífugo, sendo um dos principais problemas a instabilidade de funcionamento. Este problema pode ser resolvido utilizando o teorema de Liapunov. Assim, faremos uma análise da estabilidade do regulador centrífugo de Watt utilizando as idéias do engenheiro russo Vichnegradski.
Portanto, temos um problema prático que será transformado num problema puramente matemático, e após resolvido, poderemos estabelecer parâmetros para enunciar as conclusões práticas.

## 1 Introdução

A função do regulador centrífugo de Watt é regular automaticamente a pressão nas caldeiras de uma máquina a vapor, via válvula de entrada de vapor, não permitindo que a pressão suba muito, pois há risco de explosões ou pode danificar o motor; e impedir que baixe demasiadamente.
Abaixo, temos uma representação esquemática do regulador centrífugo e uma representação real.




**Esquema de um regulador**



**Representação real**

## 2 Resultados Preliminares

Um sistema dinâmico autônomo é um sistema de equações diferenciais lineares ou não-lineares, a parâmetros constantes, que não dependem do tempo t.
**Definição Ponto de equilíbrio assintoticamente estável:** Define-se x* como um ponto de equilíbrio assintoticamente estável, se existir r>0 tal que $x_0 \in B_r(x^*)$ então a solução de

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

É tal que $\mathbf{x}(t)$ é definida para todo t $\geq 0$ e $\lim \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*\| = 0$, onde $\| \ \|$ denote a norma usual de $\Re^n$.
O próximo teorema é o principal resultado matemático deste trabalho.
**Teorema (** ***Liapunov*****)** Seja

$$\frac{d\mathbf{x}_i}{dt} = f_i(x_1, ..., x_n), i = 1, ..., n$$

um sistema de equações diferenciais e $a = (a^1, ..., a^n)$ um ponto de equilíbrio do sistema. Seja

$$a^i_j = \partial f_{i(a)} / \partial x_j.$$

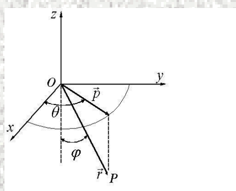
Se todos os autovalores da matriz $A = (a^i_j)$ tem parte real negativa, o ponto de equilíbrio (a) é assintoticamente estável.
Observação: A matriz **A** é a matriz jacobiana da função da função $f$ no ponto de equilíbrio (a).
**Critério de estabilidade de Hurwitz** O polinômio

$$p(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3, a_0 > 0,$$

De coeficientes reais , é estável se, e somente se os números $a_1$ e $a_3$ são positivos, e se verifica a seguinte desigualdade $a_1 a_2 > a_0 a_3$.

## 3 Estudo da Estabilidade

Considere a seguinte representação:




**Coordenadas de m**

Sejam
$r = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ o vetor posição do ponto P no qual está localizado a massa m,
$\varphi$= ângulo entre $\mathbf{r}$ e a direção negativa do eixo z,
$\theta$ = ângulo entre a projeção de $\mathbf{r}$ sobre o plano xy e a direção positiva do eixo x,
$\dot\theta$ = velocidade angular da barra central. Daí, temos:

$$\begin{cases} x = L\,\text{sen}\,\varphi\cos\theta \\ y = L\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\theta \\ z = -L\cos\varphi \end{cases}$$

As forças que atuam na massa m são: tração (T), peso (P) e resistência (R).
Aplicando a segunda lei de Newton, obtemos

$$m\ddot\varphi = m\dot\theta^2(\text{sen}\varphi)(\cos\varphi) - \frac{mg}{L}(\text{sen}\varphi) - \frac{c\dot\varphi}{L}$$

Assumimos L=1. E temos a equação diferencial da máquina a vapor.

$$J\dot w = P_1 - P$$

Sendo w a velocidade angular do eixo principal da máquina, J o momento de inércia do volante, $P_1$ o momento angular da força da máquina, P o momento angular da força que atua sobre o volante devido a carga sobre ele.
O bom funcionamento do regulador nos dá uma razão constante de transmissão:

$$n = \frac{\dot\theta}{w} > 0$$

Então, obtemos com as equações de movimento um sistema de equações diferenciais não lineares de segunda ordem:

$$\begin{cases} m\ddot\varphi = mn^2(\text{sen}\varphi)(\cos\varphi) - mg(\text{sen}\varphi) - c\dot\varphi \\ J\dot w = k\cos\varphi - \dfrac{F}{J} \end{cases}$$

Fazendo uma análise qualitativa do sistema acima e; após calcular a matriz jacobiana e seu polinômio característico, podemos aplicar o critério de estabilidade de Hurwitz e o teorema de Liapunov, de modo que que chegaremos à desigualdade abaixo; que expressa a condição de estabilidade do sistema máquina-regulador:

$$\frac{cJ}{m}v > 1,$$

Conhecida como condição de estabilidade de Vichnegradski onde v é chamado de irregularidade de marcha da máquina a vapor.

## 4 Conclusões

Segundo Vichenegradski, afetam desfavoravelmente a estabilidade do sistema máquina – regulador:
1- O aumento da massa das esferas;
2- A diminuição de c (coeficiente de resistência);
3- Diminuição de J (momento de inércia);
4- Diminuição de v (irregularidade de marcha).
Portanto, se a desigualdade (condição de estabilidade de Vichnegradski) for mantida, haverá estabilidade no sistema máquina-regulador, caso contrário, instabilidade.