# Modelagem do Movimento de Satélites Usando EDO´S: Estudo Analítico e Computacional com o MAPLE 8

**Marcos Tadeu de Oliveira Pimenta – Orientador: Prof. Dr. Marcelo Messias**

**UNESP – Universidade Estadual Paulista**

**Faculdade de Ciências e Tecnologia – Presidente Prudente - SP**

**Departamento de Matemática , Estatística e Computação**

**e-mail: marcosunesp@yahoo.com.br, marcelo@prudente.unesp.br**

O estudo do movimento de um satélite ao redor de um planeta leva ao chamado "Problema dos dois corpos", que consiste em analisar o movimento de duas partículas no $R^3$ , sujeitas cada uma ao campo gravitacional produzido pela outra. No caso em que uma das partículas tem massa desprezível, em comparação com a outra (por ex., a massa do satélite é desprezível quando comparada com a massa do planeta), podemos considerar a partícula de maior massa como fixa e analisar apenas o movimento relativo da partícula de menor massa. Para tanto, considera-se um sistema de coordenadas X=*(x,y,x)* com origem na partícula de maior massa.

Devido ao campo de forças ser central (isto é, a força tem a direção do vetor posição da partícula), o movimento do satélite fica restrito ao plano determinado pelos vetores posição *(X(t))* e velocidade *(X'(t))*. Assim, o problema pode ser reduzido em uma dimensão, do $R^3$ para o $R^2$.

Introduzindo coordenadas polares no plano *(X,X')*

$$X(t)=r(t).(\cos(\ (t)),sen(\ (t)))$$

Pode-se considerar o raio *r(t)* em função do ângulo *(t)*. Dessa forma, seja *u( )=1/r( ). S*egundo a *Lei da Gravitação Universal de Newton*, a força de atração é dada por:

$$F(X)=\frac{-GmMX}{\|X\|^3}$$

onde, *G* é a constante universal de gravitação, *m* é a massa do satélite e *M* é a massa do planeta. A expressão da energia total (Cinética + Potencial) do sistema, em coordenadas polares, é dada por:

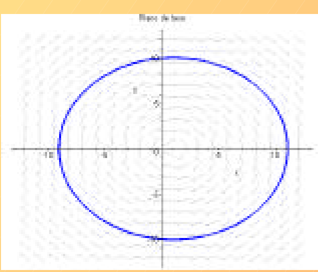
$$E=\frac{1}{2}\frac{|h|^2}{m}\left[\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+u^2\right]-GMmu$$

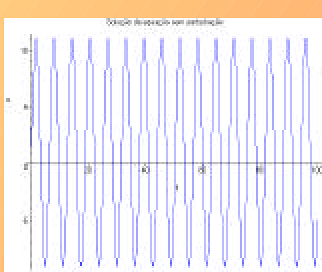
onde *h* é o momento angular do satélite. Derivando ambos os lados desta expressão, em relação a *è*, obtemos uma relação entre o inverso do raio (*u(è)*) e o ângulo *è,* dada pela seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u-\frac{m^2GM}{|h|^2}=0 \qquad 1)$$

Resolvendo essa equação e substituindo *r=1/u* na solução, obtem-se a equação de uma cônica onde o planeta está em um dos focos, podendo esta ser uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola, dependendo dos parâmetros do problema, como as massas do satélite e do planeta e o momento angular do satélite.

Em geral, os satélites naturais e artificiais que orbitam em volta dos planetas descrevem uma trajetória elíptica, como mostram as figuras abaixo, que representam os gráficos de uma solução da equações (1).





Com o propósito de analisar a estabilidade das trajetórias, podemos inserir uma perturbação periódica na equação (1), para estudar o comportamento das trajetórias de acordo com a variação da amplitude e do período da perturbação.

Dessa forma, seja:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u-\frac{m^2GM}{|h|^2}=\varepsilon\cos(\omega\theta) \qquad (2)$$

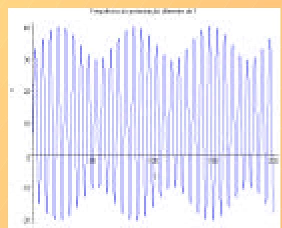
A solução geral da equação (2) é dada por:

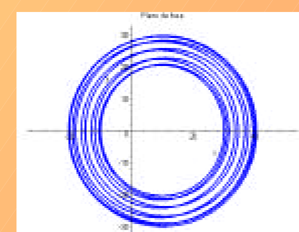
$$u(\theta)=c_1\,\mathrm{sen}(\theta)+c_2\cos(\theta)+\frac{k\omega^2-k\varepsilon\cos(\omega\theta)}{\omega^2-1}$$

onde $k=(m^2GM)/|h|^2$ .

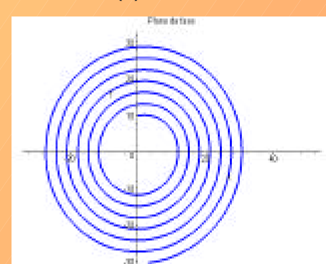
Tem-se então dois casos a considerar:

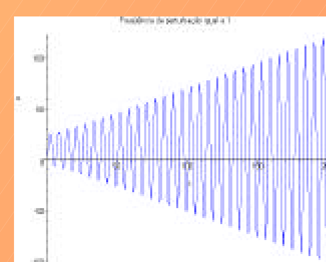
1) Se $\omega$ 1, então a solução é periódica, correspondendo a uma variação periódica do raio da órbita que é, portanto, estável. As figuras abaixo mostram gráficos típicos da solução e também do plano de fase do sistema de primeira ordem associado à equação diferencial (2):





2) Se $\omega$=1, ocorre o fenômeno chamado de ressonância, com o qual a função da perturbação periódica é solução da equação homogênea associada à equação (1). Dessa forma a solução geral da equação terá um termo da forma *èsen(è)* que será dominante, portanto, as oscilações de *u* aumentarão gradativamente tendendo ao infinito. Isso corresponde ao caso em que o raio da órbita diminui progressivamente (pois *r=1/u*), fazendo com que o satélite se choque com a superfície do planeta em um determinado tempo. As figuras abaixo mostram gráficos típicos de uma solução desse tipo e também do plano de fase do sistema de segunda ordem associado à equação diferencial (2).





Dessa forma, concluímos que o comportamento da trajetória do satélite depende diretamente da freqüência da perturbação periódica a que ele está submetido.

## Bibliografia:

1. Lopes A.;Monografias de Matemática IMPA: Introdução à Mecânica Clássica,Rio de Janeiro,1998.

2. Burghes, D. N., Downs A. M.; Elis Horwood: Modern Introduction to Classical Mechanics & Control, London, 1982.

3. Boyce W. E., DiPrima R. C.; LTC: Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, Rio de Janeiro, 2002.