Sistemas de Equações Diferenciais no Plano

unesp

Sylaine Santana de Souza

Orientador Prof. Dr.Ronan Antonio dos Reis

Licenciatura em Matemática - FCT-UNESP – Câmpus de Presidente Prudente/SP

E-mail: sylainesantana@yahoo.com.br, ronan@prudente.unesp.br

Introdução

Neste trabalho, estudamos os sistemas lineares bidimensionais autônomos, ou seja, sistemas do tipo $\dot{x} = Ax$, onde $x \in R^2$,

A é uma matriz real 2x2 e $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$.

Para tais sistemas, estudamos os seus retratos de fase. Fizemos isto através da análise dos autovalores da matriz A.

Sistemas Lineares Bidimensionais

Consideremos o sistema linear $\dot{x} = Ax$ (1), onde $x \in R^2$, A é uma matriz real 2x2 e

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

Aqui, descreveremos geometricamente as soluções da equação (1) no caso em que $\det A \neq 0$. (Veja Figura 5). Isto foi feito a partir da análise do sistema

$$\dot{x} = Bx \qquad (2)$$

onde $B = PAP^{-1}$ e $\quad x = Py$

Observamos que a matriz B tem uma das seguintes formas

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad ou \quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

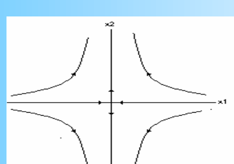
Lembramos agora um resultado fundamental para sistemas Lineares, o qual diz que a solução de (2), que denotamos por x(t), junto com a condição inicial $x(0) = x_0$, é dada (unicamente) por $x(t) = e^{At}x_0$, onde e^{At} é uma função de matrizes reais 2x2 definida pela sua série de Taylor.

Observamos que, desde que sabemos calcular a exponencial de uma matriz 2x2, podemos resolver explicitamente todas as soluções de (1). Mas, sem encontrar explicitamente as soluções, podemos também obter informações qualitativas importantes para tais sistemas. A seguir, analisaremos os sistemas bidimensionais acima, de acordo com os seguintes casos abaixo. Como referência para outros detalhes sobre este assunto, indicamos [1],[2] e [3].

Consideremos os seguintes casos:

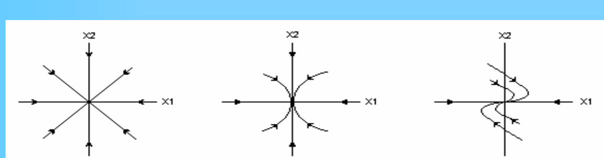
Caso I : $\quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ com $\lambda < 0 < \mu$

O retrato de fase do sistema (2) é dado pela Figura 1. Neste caso, dizemos que o sistema (2) tem uma *sela* na origem Se $\mu < 0 < \lambda$ as setas da Figura (1) são invertidas. Quando A tem dois autovalores reais de sinais opostos, o retrato de fase para o sistema (1) é equivalente ao retrato de fase da Figura 1.



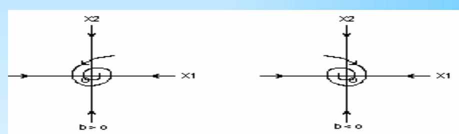
Caso II $\quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ com $\lambda \leq \mu < 0$ ou $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Os retratos de fase do sistema linear (2) são dados pela Figura 2. Em todos os casos a origem é dita um *nó estável*. Este é chamado de *nó próprio* se $\lambda = \mu$ e *nó impróprio* nos outros dois casos. Se $\lambda \geq \mu > 0$ ou se $\lambda > 0$ as setas são invertidas na figura 2 e a origem é dita um *nó instável*. Quando A tem dois autovalores reais e de mesmo sinal, o retrato de fase do sistema (1) é equivalente ao retrato de fase da Figura 2.



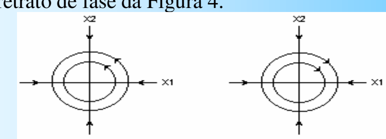
Caso III : $\quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ com a<0

O retrato de fase do sistema (2) é ilustrado na Figura 3. Neste caso, a origem é dita um *foco estável*. Se a>0, as setas da Figura 3 são invertidas, isto é, as trajetórias da origem saem para fora da origem com o crescimento de t. Nesse caso, a origem é dita um *foco instável*. Quando A tem um par de autovalores complexos conjugados não puros, o retrato de fase do sistema (1) é linearmente equivalente ao retrato de fase da Figura 3.



Caso IV $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$

O retrato de fase do sistema linear (2) é exibido pela Figura 4. Neste caso, dizemos que o sistema (2) tem um *centro* na origem. Quando A tem um par de autovalores complexos puro, o retrato de fase para o sistema (1) é equivalente ao retrato de fase da Figura 4.



Definição: Dizemos que o sistema linear (1) tem uma *sela*, *nó*, *foco* ou *centro* na origem se seu retrato de fase é equivalente a um dos retratos de fase das Figuras 1,2,3 ou 4 respectivamente, isto é, se a matriz A é semelhante a uma das matrizes B, como nos casos I,II,III,IV, respectivamente.

Consideremos o sistema linear (1), quando $\det A \neq 0$. Neste caso, observamos que a origem é o único ponto de equilíbrio (ou singularidade) do sistema linear (1). O resultado abaixo nos fornece um método para dizer quando o sistema linear (1) tem uma sela, nó, foco ou centro na origem. Fizemos isto a partir da análise dos autovalores da matriz A, os quais são encontrados resolvendo a equação característica:

$$\lambda^2 - (trA)\lambda + \det A = 0$$

Mais precisamente, temos o seguinte

Teorema: Sejam $\delta = \det A$ e $\tau = trA$. Considere o sistema (1) $\dot{x} = Ax$

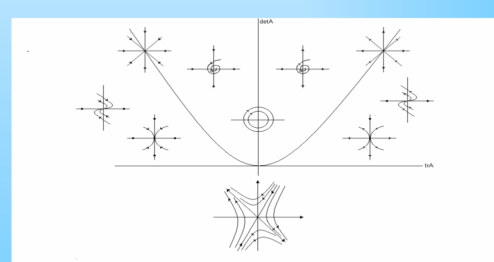
i) Se $\delta < 0$ então (1) tem uma *sela* na origem.

ii) Se $\delta > 0$ e $\tau^2 - 4\tau \geq 0$ então (1) tem um *nó* na origem, é estável se $\tau < 0$ e instável se $\tau > 0$.

iii) Se $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\tau < 0$ e $\tau \neq 0$ então (1) tem um *foco* na origem; e é estável se $\tau < 0$ se e instável $\tau > 0$.

iv) Se $\delta > 0$ e $\tau = 0$ então (1) tem um *centro* na origem.

Os resultados acima podem ser resumidas na Figura 5.



[1] Perko, L.: "Differential Equations and Dinamical Systems". Springer-Verlag, 1991.

[2] Hirsch M. W. e Smale S. :"Differential Equations, Dinamical Systems, e Linear Algebra". Academic Press, 1974.

[3]Zill, D. G. e Cullen, M. R.: "Equações Diferenciais". Makron Books Ltda. São Paulo. 2001.