Introdução ao Estudo de Coloração no Ensino Médio

Daniele Lozano
Socorro Rangel
IBILCE/UNESP
Rua Cristóvão Colombo, 2265, Jd. Nazareth, 150054-000, S.J. do Rio Preto

Nesse trabalho fazemos um estudo sobre coloração em grafos. O objetivo é identificar tópicos interessantes e motivadores para discussão em oficinas de Matemática a serem realizadas junto à rede pública de ensino do estado de São Paulo em conexão ao Projeto Escola da Família.

Conceitos Básicos de Teoria dos Grafos

Definição 1: *Um grafo* $G(V, A)$ *é uma estrutura tal que* V *é um conjunto finito não-vazio cujos elementos são chamados de vértices e* A *é um conjunto de pares não-ordenados de elementos de* V*, chamados de aresta.*

Dizemos que a aresta $e = (v_i, v_j), v_i, v_j \in V, i, j = 1, \ldots, n$ *incide* sobre os vértices v_i e v_j, e que os vértices v_i e v_j são *adjacentes*.

Definição 2: *O grau de um vértice* v_i*,* $d(v_i)$*, é igual ao número total de arestas incidentes sobre ele.*

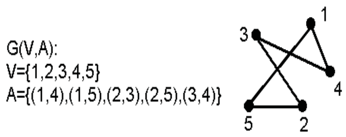

fig.1 - Representação de um grafo

Operações com Grafos

Dado um grafo $G(V, A)$:

- *Adição de aresta*: $G'(V, A')$ é tal que $A' = A \cup \{(v, w)\}$. $G + e$;
- *Remoção de aresta*: $G'(V, A')$ é tal que $A' = A - \{(v, w)\}$. $G - e$;
- *Contração de dois vértices*: contrair os vértices v e w é tal que $V' = (V - \{v, w\}) \cup \{vw\}$ e as arestas incidentes em v e w passarão a incidir em vw, e as arestas paralelas e laços são removidas;
- *Contração de aresta*: Remover a aresta $e = (v, w)$ e contrair os vértices v e w. Denotaremos por G/e.

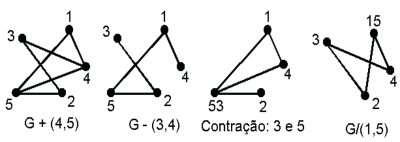

fig.2 - Operações com grafo

Problema de Coloração

Podemos colorir os vértices de um grafo usando k cores tal que vértices adjacentes recebam cores diferentes? Isto é, G é k-colorível? Quantas colorações são possíveis?

Definição 3: *O número cromático de um grafo* G*,* $\chi(G)$*, é o menor número de cores necessárias para obter uma coloração de* G*.*

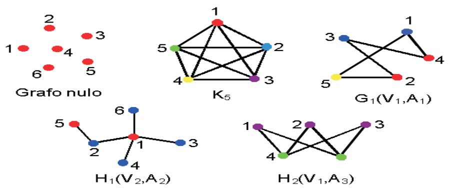

fig.3 - Coloração de grafos

Polinômios Cromáticos

Definição 4: *Um polinômio cromático* $P_G(k)$ *é uma função que conta o número de colorações de* G *com* k *cores. O menor* k *que satisfaz* $P_G(k) > 0$ *é o número cromático de* G*.*

O polinômio cromático de alguns grafos são facilmente determinados usando princípios básicos de contagem.

1. *Grafo nulo*: $P_G(k) = k^n$
2. *Grafo Completo*: $P_G(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)\ldots(k-n+1)$
3. *Árvore*: $P_G(k) = k(k-1)^{n-1}$

Teorema 5: *Sejam* G *um grafo simples e uma dada aresta* e*. Considere os grafos* $G - e$ *e* G/e*. Então:*

$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$$

Oficina de Coloração

Considere o seguinte problema: "Três filhos devem dividir as terras que receberam de herança. Cada um tem sua casa construida em um terreno e, o filho mais velho herdou a casa dos pais. A condição deixada foi que: seus terrenos não poderiam ter fronteiras comuns." [6]

Relacionando esse problema com um grafo, teremos os vértices representando os terrenos, e existirá a aresta (v_i, v_j) se os terrenos v_i e v_j tiverem fronteira em comum. Podemos então dizer que um filho receberá os terrenos v_i e v_j se eles não forem adjacentes, ou seja, a distribuição dos terrenos será feita de acordo com a coloração do grafo.

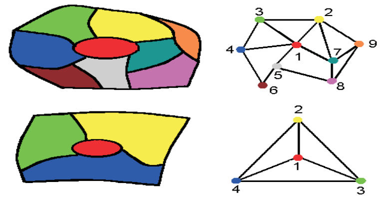

fig.4 - Coloração de mapas

As seguintes questões podem ser elaboradas para discussão do tema.
1. De quantas formas podemos distribuir os terrenos?
2. E se nenhum filho tivesse sua casa como herança?

Qual a melhor forma de abordar esse conteúdo no Ensino Médio?

Para que a discussão seja produtiva e compreendida, os alunos precisam de alguns conteúdos basicos do Ensino Médio.

Ao trabalhar com os princípio de contagem, pode ser introduzido o problema de coloração exposto acima. O polinômio cromático pode ser trabalhado em seguida, pois para obter os polinômios do grafo nulo, completo e árvore, utilizamos o princípio multiplicativo.

Bibliografia

[1] R.J. Wilson, "Introduction to Graph Theory", 4rd ed., 1996.

[2] F. Harary, "Graph Theory", Addison Wesley, 1969.

[3] P.O. Boaventura, "Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos", 3ed., 2003.

[4] M. Simões e M. Lima, "Teoria dos Grafos", Apoio ao Professor de Matemática, Ministério da Educação de Portugal, www.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/pdf/grafosmanuela.pdf (última visita 08/08/2005)