Uma introdução ao estudo de Equações de Diferenças e sua Utilização no Ensino Médio

Renata Zotin Gomes de Oliveira - rzotin@rc.unesp.br
Vagner Rodrigues de Moraes - vvagnerr@universiabrasil.net
UNESP - Universidade Estadual Paulista

Definição: Suponha que temos uma função y=f(x). Um sistema dinâmico discreto de 1ª ordem é uma seqüência de números A(n), para n=0, 1, ... tais que cada número depois do primeiro é encontrado pela relação recursiva

A(n+1)=f(A(n)).

A seqüência de números dados pela relação

A(n+1)-A(n)=g(A(n)), onde f(x)=g(x)+x

é chamada de **Equação de Diferenças de 1ª ordem.**

Valores de Equilíbrio

Definição: Considere um sistema dinâmico de 1ª ordem

A(n+1)=f(A(n))

Um número **a** é chamado valor de equilíbrio para este sistema se A(k)=a para todos os valores de k quando o valor inicial A(0)=a, isto é, A(k)=a é uma solução constante para o sistema dinâmico.

Teorema da Primeira Derivada

Suponha que **a** é um valor de equilíbrio para o sistema dinâmico

A(n+1)=f(A(n))

O valor de equilíbrio **a** é estável ou atrator se |f ’(a)|<1 e é instável ou repulsor se |f ’(a)|>1.

Exemplos

1. Finanças

Suponha que você abriu uma poupança com depósito inicial de R$1000,00 a juros de 8% compostos trimestralmente. Quanto você terá em sua conta depois de 1 ano?

Façamos as seguintes hipóteses: Temos uma conta com uma quantia A(n) depois de n períodos compostos, coletando 100I% ao ano, composto m vezes por ano. Assumamos também que é feito um depósito(ou retirada) b a cada período composto. Nós temos, então, o seguinte sistema dinâmico:

A(n+1)= (1+I/m)A(n)+b

No exemplo b=0, pois não há nenhum depósito.
Aplicando a solução de sistemas dinâmicos e tomando r=(1+I/m) e $A(0)=a_0$ a quantia inicial na sua conta, teremos:

$$A(k)=(1+I/m)^k(a_0+mb/I)-mb/I$$

Como b=0, então: $A(k)=(1+I/m)^k a_0$
1 ano=4 trimestres, a_0=1000, I=8% e m=4.

Portanto, A(4)=1082,43.

2. Logístico

A(n+1)=(1+r)A(n)-bA(n), onde b=r/L

Se tomarmos r =0,2 e L=8, teremos o sistema

A(n+1)=1,2A(n)-0,025A(n).

Neste caso os valores de equilíbrio são a=0 e a=8. Este último é a capacidade suporte do meio.

Utilizando Equações de Diferenças no Ensino Médio

Vários conteúdos do Ensino Médio poderiam ser introduzidos utilizando Equações de Diferenças. Apresentamos uma sugestão, onde o professor deve propor um tema aos alunos ou até mesmo deixar que os alunos sugiram algum outro tema de interesse de estudo.

TEMA: FORMATURA

Vamos supor que se está trabalhando com alunos do 1º ano do Ensino Médio, no mês de outubro, tendo, portanto, como objetivo usar o dinheiro investido para pagamento da formatura de toda a sala.

Problema 1.

Suponha que toda sala abra uma poupança em um banco que paga juros de 0,7% ao mês, fazendo um depósito inicial **x0**, com o objetivo de deixar aquele dinheiro no banco por 24 meses.

Os alunos poderiam calcular a quantia presente na conta após vários meses para que percebam a dificuldade de obterem o quanto terão após 24 meses.

Generalizando, poderiam considerar A(n) a quantia de dinheiro na poupança no n-ésimo mês depois que foi aberta a conta, a taxa de juros I=0,7% e o depósito inicial A(0)=x0. Nos próximos meses teremos:

A(1)=A(0)+0,007A(0)   A(1)=1,007A(0)
$A(2)=(1,007)^2A(0)$ $A(3)=(1,007)^3A(0)$

Estes primeiros cálculos deveriam induzir os alunos que no mês (n+1) teríamos a seguinte situação:

A(n+1)=A(n)+IA(n)=(1+I)A(n).

Além disso, também nos induziria a pensar que nos mês k teríamos

$A(k)=(1,007)^kA(0)$, k em N.

Problema 2. Qual deveria ser o depósito inicial para que tivéssemos uma certa quantia A(k) depois de k meses?

Problema 3. Quanto tempo deveríamos deixar um depósito inicial A(0), para que ao final de um certo tempo, tivéssemos uma quantia B em dinheiro?

Problema 4. E se não tivéssemos condições de depositar uma quantia muito alta e pudéssemos depositar um pouco a cada mês, em quanto tempo teríamos a quantia desejada?

Comentários:

Na sugestão acima, conteúdos como funções logarítmicas e exponenciais, progressões geométricas, dentre outros, poderiam ser introduzidos à medida que se trabalha com a solução da equação de diferenças obtida.

É de fundamental importância que o professor faça questionamentos à medida que o trabalho avança em sala de aula.

Referências:

Bassanezi, Rodney Carlos; Ensino Aprendizagem com Modelagem Matemática; Editora Contexto; 2002;

Dante, Luis Roberto; Matemática: Contexto e Aplicações; Editora Ática,1999.

Sundefur, James T.; Discrete Dynamical Systems; Oxford: Claredon; 1990;