Algumas maneiras de mostrar que os polígonos regulares tendem a circunferência e/ou círculo: aplicações de limite e óptica geométrica.

Alessandro Aparecido de Godoy Esteves; Jeferson Brambatti Granjeiro.
UNESP/FCT - Universidade Estadual Paulista/Faculdade de Ciências e Tecnologia.
Depto de Matemática, Estatística e Computação. Presidente Prudente - SP.
E-mail: alessandro_esteves@ig.com.br

INTRODUÇÃO

Neste trabalho abordamos os polígonos regulares inscritos e circunscritos, em uma circunferência de raio r, com a preocupação de apresentarmos algumas maneiras de se mostrar que conforme o número de lados destas figuras aumenta, o perímetro e a área das mesmas tendem, respectivamente, a circunferência e ao círculo. Partimos dos polígonos regulares inscritos e circunscritos aplicando em suas fórmulas gerais de perímetro o conceito de limite. Num segundo momento, talvez de uma forma não tão trivial, relacionando os polígonos circunscritos e inscritos, mostramos o que acontece quando aplicamos o limite, na diferença ou na razão, de suas respectivas áreas. E finalizando, através de um experimento simples, embasados na Física, especificamente em óptica geométrica quando nesta é abordado o assunto de espelhos planos dispostos em ângulo, verificamos, primeiro visualmente e depois utilizando o limite na fórmula que expressa o número de imagens formadas nos espelhos, que os polígonos regulares tendem a circunferência e ao círculo.

METODOLOGIA

Sejam *n, r, a, l, A, P* e *S,* respectivamente, número de lados,raio, apótema, lado, apótema de um polígono regular circunscrito, perímetro e área, de um polígono regular qualquer.
Nos polígonos inscritos, aplicando o limite em sua fórmula geral de perímetro, para *n* extremamente grande, temos:

$$P_{ni} = 2rn \cdot sen(\pi / n) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left[2rn \cdot sen(\pi / n)\right]$$

(*) Fazendo $u = (\pi / n)$ temos que, à medida que *n* cresce, *u* tende a zero. Logo:

$$2r \cdot \lim_{u \to 0} \left(\pi \cdot \frac{sen\, u}{u} \right) = 2\pi r.$$

Com isso, notamos que o perímetro do polígono tende ao comprimento da circunferência. E para o perímetro dos circunscritos, sabendo que $A = r$, percebemos que ocorre o mesmo:

$$P_{nc} = 2An \cdot tg(\pi / n) \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left[2An \cdot tg(\pi / n)\right] =$$

$$2A \lim_{n \to +\infty} \left[n \cdot \frac{sen(\pi / n)}{cos(\pi / n)} \right] \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$2A \cdot \lim_{u \to 0} \left(\pi \cdot \frac{sen\, u}{u} \cdot \frac{1}{cos\, u} \right) = 2Ar.$$

Agora, aplicando-se o limite, para *n* grande, na diferença entre as áreas do circunscrito e do inscrito, temos que o resultado é zero.

$$\lim_{n \to +\infty} \left(S_{nc} - S_{ni} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \left\{ nA^2 \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right) - \left[nr^2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right] \right\} =$$

$$\lim_{n \to +\infty} nA^2 \cdot tg\left(\frac{\pi}{n}\right) - \lim_{n \to +\infty} nr^2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \overset{(*)}{\Rightarrow}$$

$$\pi A^2 \cdot \lim_{u \to 0} \left(\frac{sen\, u}{u} \cdot \frac{1}{cos\, u} \right) - \left[\pi r^2 \cdot \lim_{u \to 0} \left(\frac{sen\, u}{u} \cdot cos\, u \right) \right] =$$

$$\pi A^2 - \pi r^2 = 0.$$

Isto significa que tanto no circunscrito como no inscrito, à medida que cresce o número de lados, as áreas de ambos tendem a área do círculo.

Uma outra maneira de mostrarmos que os polígonos regulares tendem a circunferência e/ou círculo é aplicarmos o limite, para *n* grande, na razão entre as áreas do circunscrito e do inscrito, e obtermos com resultado 1. Assim:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_{nc}}{S_{ni}} = 1 \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n}A^2 \cdot tg(\pi / n)}{\cancel{n}r^2 \cdot sen(\pi / n) \cdot cos(\pi / n)} =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{sen(\pi / n)}{cos(\pi / n)}}{sen(\pi / n) \cdot cos(\pi / n)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{cos^2(\pi / n)} = 1$$

Por fim, aplicando-se o limite, para um ângulo próximo de zero na fórmula que expressa o número de imagens em espelhos planos dispostos em ângulo, temos:

$$N = \frac{2\pi}{\alpha} - 1 \quad , \quad com \quad 0 < \alpha < \frac{2\pi}{3}$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{2\pi}{\alpha} - 1 \right) = \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right) - \lim_{\alpha \to 0} (1) = \lim_{\alpha \to 0} \left(\frac{2\pi}{\alpha} \right) - 1$$

Substituindo $\frac{2\pi}{\alpha}$ por *u*, temos que quando α tende a zero, *u* tende a $+\infty$. Assim:

$$\lim_{u \to +\infty} (u) - 1 = +\infty.$$

Com isso, obtemos infinitas imagens. E através de um experimento simples, usando-se dois espelhos planos fixados com fita adesiva e um segmento de reta feito numa base, compreendemos o significado deste último resultado na prática:

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Recorremos à noção de limite no decorrer de todo o trabalho, encontrando assim uma das diversas aplicações deste conceito. Com isso, pretendemos chamar a atenção dos leitores/professores para sugestões de uso destas aplicações como motivação nas aulas de Cálculo I. Além disso, a simplicidade do experimento possibilita que seja desenvolvido também com alunos do ensino fundamental e médio.

BIBLIOGRAFIA

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1985.
GIOVANNI, José Ruy. *Matemática Fundamental, 2º grau: volume único*. São Paulo: FTD, 1994.