

# Métodos Geométricos em Eletrodinâmica

**Márcio A. Faria Rosa,**

Depto de Matemática, IMECC, UNICAMP,  
13083-859, Campinas, SP

E-mail: marcio@ime.unicamp.br,

**Igor L. Freire,\***

Depto de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP,  
13083-859, Campinas, SP

E-mail: igor@ime.unicamp.br,

**Roldão da Rocha Júnior,†**

Instituto de Física Gleb Wataghin, IFGW, UNICAMP,  
13083-970, Campinas, SP

E-mail: roldao@ifi.unicamp.br

## 1. Introdução

Seja  $\mathbf{R}$  o corpo dos reais e  $M$  um espaço vetorial sobre  $\mathbf{R}$ . Para  $p \in \mathbf{N}$ , construímos o espaço  $\Lambda^p(M)$  dos  $p$ -vetores, cujos elementos são da forma:

$$\sum_{i_1 \cdots i_p} a_{i_1 \cdots i_p} \alpha_{i_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{i_p}.$$

onde  $a_{i_1 \cdots i_p} \in \mathbf{R}$  e  $\alpha_j \in M$ , para todo  $j$ . Se  $\alpha, \beta, \alpha_j, 1 \leq j \leq p$  são elementos de  $M$  e  $a$  e  $b$  escalares, valem as propriedades:

1.  $(a\alpha + b\beta) \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = a(\alpha \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p) + b(\beta \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)$ .
2.  $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p = 0$  se existe  $i \neq j$  tal que  $\alpha_i = \alpha_j$ .
3.  $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_i \wedge \alpha_{i+1} \wedge \cdots \wedge \alpha_p = -\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_{i+1} \wedge \alpha_i \wedge \cdots \wedge \alpha_p$ .

Se  $\pi$  é um elemento do grupo de permutações  $S_p$ , então

$$\alpha_{\pi_1} \wedge \cdots \wedge \alpha_{\pi_p} = \text{sign}(\pi) \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_p.$$

Além disso, temos que  $\dim \Lambda^p(M) = \binom{n}{p}$ , onde  $n = \dim M$ .

O conjunto de todas as  $p$ -formas diferenciáveis em  $M$  será denotado por  $F^p(M)$ , com  $1 \leq p \leq n$ . Este conjunto torna-se um espaço vetorial se definirmos as operações a seguir, onde  $a \in \mathbf{R}$  e  $\omega, \eta \in F^p(M)$ :

$$a\omega : x \mapsto (a\omega)(x) = a\omega(x),$$

$$\omega + \eta : x \mapsto (\omega + \eta)(x) = \omega(x) + \eta(x).$$

Além disso, se  $f \in C^\infty(M)$  e  $\omega \in F^p(M)$ , a  $p$ -forma  $f\omega$  é definida por

$$f\omega : x \mapsto (f\omega)(x) = f(x)\omega(x), \quad x \in M.$$

O produto exterior  $\wedge$  entre  $p$  e  $q$ -formas é definido por

$$\wedge(\omega, \eta)(x) = \omega(x) \wedge \eta(x)$$

Tal produto satisfaz:

1.  $\omega \wedge \eta = (-1)^{pq} \eta \wedge \omega$ .
2.  $(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta)$ .
3.  $(\eta + \gamma) \wedge \omega = \eta \wedge \omega + \gamma \wedge \omega$ .
4.  $f(\omega \wedge \eta) = (f\omega) \wedge \eta = \omega \wedge (f\eta)$ .

onde  $\omega \in F^p(M)$ ,  $\eta, \gamma \in F^q(M)$ ,  $\theta \in F^l(M)$  e  $f \in C^\infty(M)$ . Daqui para frente utilizaremos o fato que toda  $p$ -forma pode ser escrita como combinação linear do produto de 1-formas.

**Teorema 1.1.** *Existe um único operador  $d : F^p(M) \mapsto F^{p+1}(M)$  tal que*

1.  $d$  é nilpotente, valendo  $d^2 = 0$ .
2. Se  $f \in C^\infty(M)$ ,  $df$  é a diferencial de  $f$ .
3.  $d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^{\text{gr} \omega} \omega \wedge d\eta$ .

*Demonstração.* Consulte [1]. □

## 2. O operador $\star$ de Hodge

Seja  $(g_{ij})$  a matriz cujas entradas são os elementos do tensor de métrica de  $M$  e  $(g^{ij})$  sua inversa,  $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$  um elemento da base das  $p$ -formas. O

\*bolsista da Capes

†bolsista da Capes

operador  $\star$  de Hodge agindo no elemento  $dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} \in \Lambda^p(M)$  é um elemento de  $\Lambda^{n-p}(M)$  dado por

$$\begin{aligned} \star dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p} &= \\ &= g^{i_1 j_1} \dots g^{i_p j_p} \epsilon_{j_1 \dots j_n} \frac{\sqrt{|g|}}{(n-p)!} dx^{j_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_n} \end{aligned} \quad (2.1)$$

onde  $\epsilon$  é o tensor de Levi-Civita,  $g$  é o determinante da matriz  $(g_{ij})$ . Na equação acima, adotamos a convenção de soma de Einstein. Se  $A = (a_{ij})$  é uma matriz hermitiana  $n \times n$ , o operador  $\star_A$  é definido como o operador dado pela Eq. (2.1) com  $g^{ij} = \frac{a_{ji}^*}{\det A}$ . Por fim, definimos o produto interior  $\cdot$  entre formas. Se  $\alpha \in F^p(M)$  e  $\beta \in F^q(M)$ , então

$$\alpha \cdot \beta = \star((\star\beta) \wedge \alpha).$$

### 3. Equações de Maxwell em formas

As equações básicas da eletrodinâmica são as chamadas equações de Maxwell. É bem conhecida sua expressão utilizando o cálculo vetorial usual. Em formas diferenciais e supondo que a dependência temporal seja uma exponencial complexa da forma  $e^{i\omega t}$ , elas se tornam:

$$dE = i\omega B, \quad (3.1)$$

$$dH = -i\omega D + J, \quad (3.2)$$

$$dD = \rho, \quad (3.3)$$

$$dB = 0. \quad (3.4)$$

onde  $D$ ,  $B$  e  $J$  são as 2-formas deslocamento elétrico, indução magnética e densidade de corrente, respectivamente;  $H$  e  $E$  são as 1-formas campo magnético e campo elétrico e  $\rho$  é a 3-forma densidade de carga. As relações constitutivas entre os campos são:

$$D = \star_\epsilon E, \quad (3.5)$$

$$B = \star_\mu H. \quad (3.6)$$

onde  $(\epsilon)$  e  $(\mu)$  são as matrizes associadas aos tensores de permissividade elétrica e permeabilidade magnética do meio. Aplicando o operador  $\star_\mu d\star_\mu$  na Eq. (3.2) e utilizando a Eq. (3.3), temos:

$$(-\star_\mu d\star_\mu d + \omega^2 \star_\mu \star_\epsilon)E = -i\omega \star_\mu J$$

que pode ser reescrita como:

$$(-\star_\mu d\star_\mu d + d\star_\mu d\star_\mu + \omega^2 \star_\mu \star_\epsilon)E = -i\omega \star_\mu J + d\star_\mu d\star_\mu E$$

Nosso objetivo é calcular a  $1 \otimes 1$ -forma de Green  $g$ , que satisfaz a equação

$$(-\star_\mu d\star_\mu d + \omega^2 \star_\mu \star_\epsilon)g(r_1, r_2) = -\delta(r_1 - r_2)I.$$

onde  $I = dx_1 \otimes dx_2 + dy_1 \otimes dy_2 + dz_1 \otimes dz_2$ . Se os tensores de permissividade e permeabilidade do meio são hermitianos, a representação matricial da diádica de Green é (consulte [1] ou [2]):

$$g = \det\mu \frac{1}{4\pi\vec{r}} \begin{pmatrix} e^{im_1\vec{r}} & & \\ & e^{im_2\vec{r}} & \\ & & e^{im_3\vec{r}} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

onde  $m_i$  são as raízes dos autovalores da matriz  $\omega^2 \epsilon^t \mu^{-t}$  com parte real positiva e

$$\vec{r} = \sqrt{\det\mu} \begin{pmatrix} x \\ \mu_1 \\ y \\ \mu_2 \\ z \\ \mu_3 \end{pmatrix}$$

onde os  $\mu_j$  são os autovalores da matriz  $\mu$ .

### 4. Aplicações a Ferritas

Ferritas são óxidos magnéticos de ferro empregados na engenharia. A matriz associada ao tensor  $\mu$  é

$$\mu = \mu_0 \begin{pmatrix} \alpha & -i\beta & \\ i\beta & \alpha & \\ & & \gamma \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

e o tensor de permissividade é  $\epsilon I$ , onde  $I$  é a matriz identidade,  $\mu_0$  é a permeabilidade magnética do vácuo,  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ . Assim

$$m_1 = \omega \sqrt{\frac{\epsilon}{(\alpha + \beta)\mu_0}},$$

$$m_2 = \omega \sqrt{\frac{\epsilon}{(\alpha - \beta)\mu_0}},$$

e

$$m_3 = \omega \sqrt{\frac{\epsilon}{\gamma\mu_0}}.$$

Com isso, a Eq. (3.7) se torna:

$$g = g_0 \text{diag} \left( e^{i\omega\sqrt{\epsilon\mu_0(\alpha-\beta)\gamma}r'}, e^{i\omega\sqrt{\epsilon\mu_0(\alpha+\beta)\gamma}r'}, e^{i\omega\sqrt{\epsilon\mu_0(\alpha^2-\beta^2)}r'} \right) \quad (4.2)$$

onde

$$g_0 = \frac{\mu_0^2(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}}{4\pi r'}$$

e  $\vec{r} = \left( \frac{x}{\sqrt{\alpha+\beta}}, \frac{y}{\sqrt{\alpha-\beta}}, \frac{z}{\sqrt{\gamma}} \right)$ . Se  $\beta = 0$  e  $\gamma = \alpha$ , então:

$$g = \frac{\mu^2}{4\pi r} \begin{pmatrix} e^{i\omega\sqrt{\epsilon\mu}r} & & \\ & e^{i\omega\sqrt{\epsilon\mu}r} & \\ & & e^{i\omega\sqrt{\epsilon\mu}r} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

onde  $\vec{r} = (x, y, z)$ . A expressão acima nada mais é que a diádica de Green para meios isotrópicos.

## 5. Equações de Fresnel para ferritas

Em [1] foi mostrado que as componentes do campo indução magnética são dadas por:

$$B_i = \frac{n^2 \mu_i}{n^2 - \varepsilon \mu_i} (s \cdot H) s_i \quad (5.1)$$

onde  $n = \frac{1}{v}$  e  $B = B_0 e^{i(k\vec{s} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ .

Multiplicando a equação anterior por  $s_i$ , dividindo por  $\mu_i$ , somando os índices e dividindo o resultado final por  $n^2$ , obtemos:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{n^2 - \varepsilon \mu_i} = \frac{1}{n^2}. \quad (5.2)$$

A Eq. (5.2) é equivalente a:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{\varepsilon \mu_i}} = 0 \quad (5.3)$$

e chamando  $v_i = \varepsilon \mu_i$ , segue que:

$$\sum_{i=1}^3 \frac{s_i^2}{v^2 - v_i^2} = 0. \quad (5.4)$$

As Eqs. (5.2) – (5.4) são as *Equações de Fresnel* para ferritas.

## 6. Rotações de Faraday

Suponhamos que uma onda plana, monocromática atravessa uma ferrita e que a região onde analisaremos seja tal que não precisemos nos preocupar com efeitos de bordo. Por comodidade, suponhamos que a onda propaga-se em relação a direção  $dz$ . Em [1], mostramos que o campo magnético satisfaz a equação

$$\omega^2 \varepsilon \star_{\mu} H = d \star dH. \quad (6.1)$$

Supondo que a 1-forma campo magnético seja

$$H = (H_1 dx + H_2 dy) e^{i(kz - \omega t)}$$

chegamos ao sistema

$$\omega^2 \varepsilon \mu_0 \begin{pmatrix} \alpha & -i\beta \\ i\beta & \alpha \end{pmatrix} = k^2 \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

ou seja, uma equação de autovalores para  $k^2$ . Resolvendo, obtemos as seguintes soluções:

$$k_+^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_0 (\alpha + \beta), \quad (6.3)$$

$$k_-^2 = \omega^2 \varepsilon \mu_0 (\alpha - \beta). \quad (6.4)$$

Isto significa que a solução consiste de duas ondas planas circularmente polarizadas girando em sentidos opostos.

Substituindo as Eqs. (6.3) e (6.4) na Eq. (6.2), obtemos, respectivamente:

$$H_1 = -ih, \quad (6.5)$$

$$H_2 = ih. \quad (6.6)$$

onde consideramos  $H_2 = h$ .

A solução geral do sistema é:

$$H = \left[ -ic_1 h e^{ik_+ z} + ic_2 h e^{ik_- z} \right] e^{-i\omega t} dx + \left[ -c_1 h e^{ik_- z} + c_2 h e^{ik_+ z} \right] e^{-i\omega t} dy \quad (6.7)$$

Escolhendo

$$c_1 = -c_2 = \frac{i}{2}$$

e chamando  $H_1(z)$  e  $H_2(z)$  as componentes na direção de  $dx$  e  $dy$  independentes do tempo, temos:

$$H_1(z) = \frac{h}{2} e^{ik_+ z} + \frac{h}{2} e^{ik_- z}, \quad (6.8)$$

$$H_2(z) = i \frac{h}{2} e^{ik_+ z} - i \frac{h}{2} e^{ik_- z}. \quad (6.9)$$

As Eqs.(6.10) e (6.11) podem ser re-escritas como

$$H_1(z) = h \cos\left(\frac{k_+ - k_-}{2} z\right) e^{-i \frac{k_+ + k_-}{2} z}, \quad (6.10)$$

$$H_2(z) = h \sin\left(\frac{k_+ - k_-}{2} z\right) e^{-i \frac{k_+ + k_-}{2} z}. \quad (6.11)$$

Definindo  $\theta$  como sendo o ângulo tal que

$$tg \theta = \frac{H_2(z)}{H_1(z)} = tg\left(\frac{k_+ - k_-}{2} z\right), \quad (6.12)$$

cuja solução é

$$\theta_n = \left(\frac{k_+ - k_-}{2} z\right) + 2n\pi, \quad n \text{ inteiro}. \quad (6.13)$$

Escolhendo  $n = 0$ , temos:

$$\theta_0 = \frac{1}{2} z \omega \sqrt{\varepsilon \mu_0 \alpha} \left[ \sqrt{1 + \frac{\beta}{\alpha}} - \sqrt{1 - \frac{\beta}{\alpha}} \right]. \quad (6.14)$$

A Eq. (6.14) nos diz que uma onda percorrendo uma certa distância numa direção é rotacionada através de um ângulo  $\theta_0$  com respeito a direção do campo. Quando a onda é refletida e retorna ao ponto inicial, ela sofre uma nova rotação de  $\theta_0$ , de modo que ela sofre uma rotação total de  $2\theta_0$ .

Supondo que termos de ordem cúbica ou superiores podem ser desprezados, uma ligeira modificação das Eqs. (6.3) e (6.4) nos dá:

$$k_{\pm} = \omega \varepsilon \mu_0 \left[ 1 \pm \frac{\alpha}{2\beta} + \frac{1}{8} \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right]. \quad (6.15)$$

Substituindo o resultado anterior na Eq. (6.14), obtemos:

$$\theta_0 = \frac{\beta}{2\alpha} z \omega \sqrt{\alpha \mu_0 \epsilon}. \quad (6.16)$$

Como  $\theta_0 \neq 0$ , segue que a ferrita é um meio não-recíproco.

## Referências

- [1] I. L. Freire, "Aplicação de Formas Diferenciáveis à Eletrodinâmica de Meios Anisotrópicos", *Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada*, IMECC-Unicamp, (2004).
- [2] R. da Rocha, I. L. Freire, M. A. Faria Rosa, Spacetime Deformations and Electromagnetism in Material Media, *R.P 27/05-IMECC-Unicamp, submetido ao Can. J. Phys. [physics/0502012]* (2005).