

# Análise de um Pêndulo Mecânico Não Ideal nas Principais Ressonâncias

Adriana O. Dias,\*

Masayoshi Tsuchida,

Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,  
15054-000, São José do Rio Preto, SP

E-mail: adiod@bol.com.br, tsuchida@ibilce.unesp.br,

Reyolando M. L. R. F. Brasil

Depto. de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica, USP

Av. Prof. Almeida Prado tv. 2, n. 271

05508-900, São Paulo, SP

E-mail: mlrdrfbr@usp.br.

## Resumo

Neste trabalho analisamos a dinâmica de um pêndulo com vibração horizontal. A partir das equações de movimento, introduzimos o sistema de equações adimensionais de primeira ordem, o qual constitui a base da análise usual. Determinamos os pontos de equilíbrio, o sistema linear associado, e através de simulações numéricas investigamos a dinâmica do sistema na vizinhança do ponto de equilíbrio estável.

## Palavras-chave

Problema não ideal, perturbação de potência limitada, pêndulo mecânico, pêndulo eletromotor.

## Introdução

O estudo de sistemas dinâmicos ganhou um grande impulso a partir da observação de que, em certas circunstâncias, a fonte de perturbação e o sistema podem interagir. Nesse caso, a fonte de perturbação é afetada pelo comportamento do sistema dinâmico, e essa interação ocorre quando a energia da fonte excitadora é limitada. Sistemas dinâmicos com essa característica são denominados sistemas dinâmicos não ideais.

O estado da arte das pesquisas sobre problemas não ideais até 1979 foi traçado por Nayfeh e Mook [6], e mais recentemente por Balthazar e colaboradores [1], [2]. Vários autores têm estudado uma grande variedade de sistemas dinâmicos não ideais. Neste trabalho fazemos um estudo introdutório de um sistema formado por um bloco oscilante, ao qual é adaptado um agente perturbador representado por um motor DC com energia limitada. Um

grau de liberdade adicional é obtido acoplando-se um pêndulo ao bloco, como mostrado na Figura 1. Este sistema dinâmico é semelhante ao pêndulo eletromotor analisado por Belato [3], [4] e Dias e Tsuchida [5]. Neste trabalho analisamos o comportamento em torno de um ponto de equilíbrio, considerando modelos linear e exponencial para o torque do motor. Estudamos também a situação em que o motor e o sistema se interagem, onde fica clara a característica de problema não ideal.

## Pêndulo mecânico não ideal

O sistema dinâmico considerado neste trabalho está representado na Figura 1.

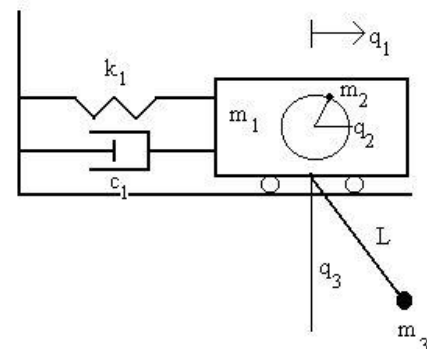


Figura 1: Pêndulo com vibração horizontal.

Os parâmetros do sistema são:

$k_1$ : constante da mola,  $c_1$ : coeficiente do amortecedor,  $m_1$ : massa do bloco,  $m_2$ : massa excêntrica do motor,  $m_3$ : massa do pêndulo,  $L$ : comprimento do pêndulo,  $R$ : distância da massa  $m_2$  ao eixo do motor,  $g$ : aceleração da gravidade,  $J_2$ : momento de inércia do rotor,  $M(\dot{q}_2)$ : torque líquido do motor,

\*bolsista de Pós-graduação CNPq

$c_3$ : amortecimento do pêndulo,  $q_1$ : vibração horizontal do bloco,  $q_2$ : deslocamento angular de  $m_2$  e  $q_3$ : deslocamento angular do pêndulo.

## Equações de movimento

As equações de movimento do sistema são as seguintes:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 + c_1\dot{q}_1 + k_1q_1 = m_2R(\ddot{q}_2\text{sen}(q_2) + \dot{q}_2^2\text{cos}(q_2) - m_3L(\ddot{q}_3\text{cos}(q_3) - \dot{q}_3^2\text{sen}(q_3))) \quad (1)$$

$$(m_2R^2 + J_2)\ddot{q}_2 = m_2R(\dot{q}_1\text{sen}(q_2) + \dot{q}_1\dot{q}_2\text{cos}(q_2)) + M(\dot{q}_2) + gm_2R\text{cos}(q_2) \quad (2)$$

$$m_3L^2\ddot{q}_3 + c_3\dot{q}_3 = -m_3L(\ddot{q}_1\text{cos}(q_3) - \dot{q}_1\dot{q}_3\text{sen}(q_3)) - gm_3L\text{sen}(q_3) \quad (3)$$

## Equações de movimento adimensionais

O estudo de sistemas dinâmicos torna-se mais adequado quando se utiliza variáveis adimensionais. Assim, introduzimos novas variáveis definidas por

$$\bar{q}_1 = \frac{q_1}{L} \quad (4)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}t \quad (5)$$

Substituindo-as nas equações (1) a (3), obtemos as equações adimensionais de movimento:

$$\begin{aligned} \bar{q}_1'' &= \left[ \frac{m_2R}{L}(\dot{q}_2''\text{sen}(q_2) + \dot{q}_2'\text{cos}(q_2)) - m_3(\dot{q}_3''\text{cos}(q_3) - \dot{q}_3'^2\text{sen}(q_3)) - \frac{m_1}{L}\bar{q}_1 - c_1\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}\bar{q}_1' \right] / (m_1 + m_2 + m_3) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_2'' &= [m_2RL(\bar{q}_1''\text{sen}(q_2) + \bar{q}_1'\dot{q}_2'\text{cos}(q_2)) + \frac{m_1}{k_1}M(\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}\dot{q}_2') + gm_2\frac{m_1}{k_1}R\text{cos}(q_2)] / (m_2R^2 + J_2) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_3'' &= -\bar{q}_1''\text{cos}(q_3) - \bar{q}_1'\dot{q}_3'\text{sen}(q_3) - \frac{gm_1}{LK_1}\text{sen}(q_3) - \frac{c_3}{m_3L^2}\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}\dot{q}_3' \end{aligned} \quad (8)$$

Afim de simplificar adotamos os seguintes parâmetros:  $M = m_1 + m_2 + m_3$ ,  $I = m_2R^2 + J_2$ ,  $a_1 = \frac{m_2R}{LM}$ ,  $a_2 = \frac{m_3}{M}$ ,  $a_3 = \frac{m_1}{ML}$ ,  $a_4 = \frac{c_1}{M}\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}$ ,  $a_5 = \frac{m_2RL}{I}$ ,  $a_6 = \frac{m_1}{k_1I}$ ,  $a_7 = \frac{gm_1}{Lk_1}$ ,  $a_8 = \frac{c_3}{m_3L^2}\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}$ ,  $a_9 = \frac{gm_2m_1R}{Ik_1}$ .

Introduzindo o vetor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (\bar{q}_1, \bar{q}_1', \dot{q}_2, \dot{q}_2', \dot{q}_3, \dot{q}_3')^T$  e os novos parâmetros, as equações diferenciais anteriores são transformadas no sistema equivalente de equações

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = a_1f_1 - a_2f_2 - a_3x_1 - a_4x_2 \\ x_3' = x_4 \\ x_4' = a_5f_3 + a_6M(\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}x_4) + a_9\text{cos}(x_3) \\ x_5' = x_6 \\ x_6' = f_4 - a_7\text{sen}(x_5) - a_8x_6 \end{cases} \quad (9)$$

Onde

$$\begin{aligned} f_1 &= x_4'\text{sen}(x_3) + x_4^2\text{cos}(x_3), \\ f_2 &= x_6'\text{cos}(x_5) - x_6^2\text{sen}(x_5), \\ f_3 &= x_2'\text{sen}(x_3) + x_2x_4\text{cos}(x_3), \\ f_4 &= -x_2'\text{cos}(x_5) + x_2x_6\text{sen}(x_5). \end{aligned}$$

O sistema (9) pode ser escrito como  $A_0x' = Ax$ , onde

$$A = \begin{pmatrix} x_2 \\ a_1x_4^2\text{cos}(x_3) + a_2x_6^2\text{sen}(x_5) - a_3x_1 - a_4x_2 \\ x_4 \\ a_5x_2x_4\text{cos}(x_3) + M(\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}x_4)a_6 + a_9\text{cos}(x_3) \\ x_6 \\ x_2x_6\text{sen}(x_5) - a_7\text{sen}(x_5) - a_8x_6 \end{pmatrix}$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_1\text{sen}(x_3) & 0 & a_2\text{cos}(x_5) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_5\text{sen}(x_3) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \text{cos}(x_5) & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos que  $A_0$  é invertível, então  $A_0x' = Ax$  pode ser reescrito como  $x' = A_0^{-1}Ax$ , e assim chegamos ao seguinte resultado

$$x' = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{1}{\beta}(B + a_1\text{sen}(x_3)D - a_2\text{cos}(x_5)E) \\ x_4 \\ -\frac{1}{\beta}(a_5\text{sen}(x_3)B + (1 - a_2\text{cos}^2(x_5))D - a_5a_2\text{sen}(x_3)\text{cos}(x_5)E) \\ x_6 \\ -\frac{1}{\beta}(\text{cos}(x_5)B + a_1\text{sen}(x_3)\text{cos}(x_5)D + (-1 + a_1a_5\text{sen}^2(x_3))E) \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} B &= a_1x_4^2\text{cos}(x_3) + a_2x_6^2\text{sen}(x_5) - a_3x_1 - a_4x_2 \\ D &= a_5x_2x_4\text{cos}(x_3) + M(\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}x_4)a_6 + a_9\text{cos}(x_3) \\ E &= x_2x_6\text{sen}(x_5) - a_7\text{sen}(x_5) - a_8\text{sen}(x_6) \end{aligned}$$

## Pontos de equilíbrio

Para o sistema estudado encontramos os pontos de equilíbrio

$$(1) \quad x_1 = x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0 \text{ e } x_3 = \arccos\left(\frac{-a_6 M(0)}{a_9}\right)$$

$$(2) \quad x_1 = x_2 = x_4 = x_6 = 0, \quad x_5 = \pi \text{ e } x_3 = \arccos\left(\frac{-a_6 M(0)}{a_9}\right)$$

Neste trabalho foi feito um estudo numérico do sistema em torno do ponto de equilíbrio (1).

## Matriz Jacobiana

Adotamos, no sistema MKS, os seguintes valores para os parâmetros:  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 0.2$ ,  $m_3 = 0.5$ ,  $R = 0.05$ ,  $L = 1.0$ ,  $a = 0.0980665$ ,  $b = 0.5$ ,  $J_2 = 0.000017$ ,  $c_1 = 0.01$ ,  $k_1 = 6.7$ ,  $g = 9.80665$  e  $c_3 = 1.0$ . Ressaltamos que o valor de  $a$  adotado, é o valor máximo para o qual ainda o ponto de equilíbrio é estável.

A matriz Jacobiana encontrada para estes valores dos parâmetros em torno do ponto de equilíbrio (1) está representada a seguir

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.833 & -0.003 & 0 & 0 & 0.610 & 0.322 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -967.118 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.833 & 0.003 & 0 & 0 & -2.073 & -1.095 \end{pmatrix}$$

Os auto valores dessa matriz são

$$-0.5277 + 1.4373i$$

$$-0.5277 - 1.4373i$$

$$-0.0212 + 0.7210i$$

$$-0.0212 - 0.7210i$$

$$0.0$$

$$-967.1180$$

e observamos que os movimentos vibratórios são assintoticamente estáveis. Além disso, os valores dos parâmetros foram escolhidos de modo que as frequências envolvidas estejam aproximadamente em uma ressonância interna 2:1.

## Simulações numéricas

O estudo numérico desse sistema dinâmico foi feito com o integrador Burlish-Stoer em Fortran. Inicialmente foi adotado o modelo linear para o torque do motor, isto é,  $M(\bar{x}_4) = a - b\bar{x}_4$  onde  $\bar{x}_4 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}x_4$ , e as condições iniciais são  $x_1 = x_5 = 0.1$ ,  $x_2 = x_4 = x_6 = 0$  e  $x_3 = \cos^{-1}\left(\frac{-a_6 M(0)}{a_9} + 0.1\right)$ .

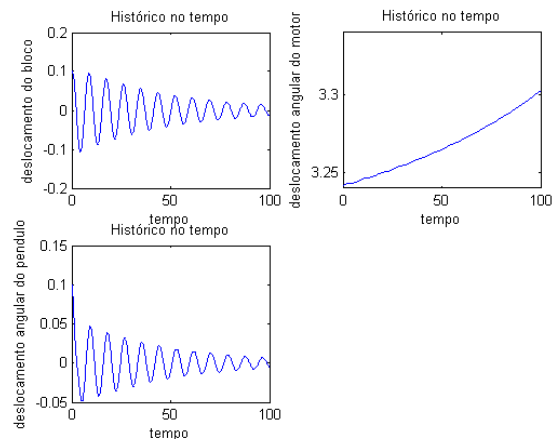


Figura 2: Vibrações do bloco, variação angular do motor e variação angular do pêndulo, respectivamente. Torque linear e  $a=0.0980665$ .

Na figura 2 estão representados os comportamentos do bloco, da massa excêntrica do motor e do pêndulo. O bloco e o pêndulo executam oscilações periódicas e amortecidas bastante semelhantes. O motor não tem potência suficiente para girar continuamente, e o ângulo  $x_3$  tende assintoticamente para um valor menor que  $2\pi$ . Na figura 3 mostramos o espectro de frequência do bloco, o qual possui um pico entre 0 e 1. Comparando com a figura 4, onde está representado o espectro de frequência do pêndulo, observamos que a frequência do pêndulo se encontra no mesmo intervalo que a do bloco. Isto mostra uma relação direta entre as oscilações do bloco e do pêndulo.

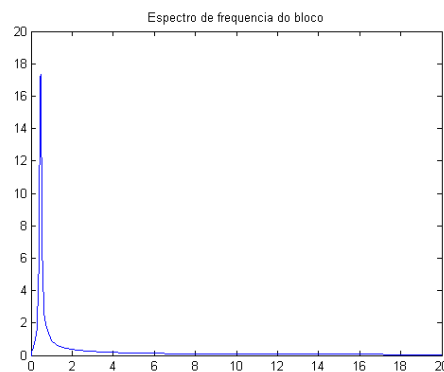


Figura 3: Espectro de frequência do bloco. O pico da frequência está localizado entre zero e um.

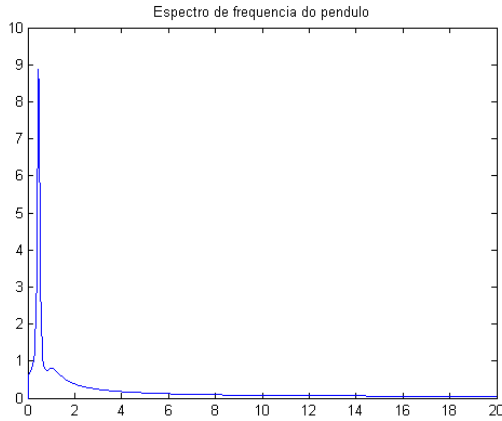


Figura 4: Espectro de frequência do pêndulo. O pêndulo mostra uma frequência no mesmo intervalo que a frequência do bloco.

A seguir apresentamos a mesma simulação, porém utilizando o modelo exponencial para o torque do motor ( $M(\bar{x}_4) = ae^{-b\bar{x}_4}$ ). Neste caso, o motor após um intervalo de tempo passa a girar continuamente, os movimentos do bloco e do pêndulo são assintoticamente estáveis, como podemos ver na figura 5.

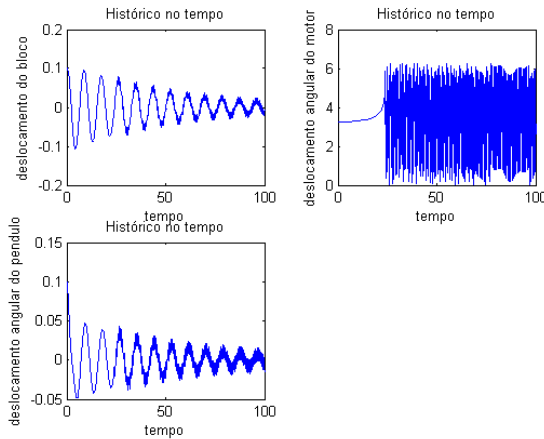


Figura 5: Movimento do bloco, variação angular do motor e variação angular do pêndulo. Torque exponencial e  $a=0.0980665$ .

Agora repetimos as simulações utilizando o modelo exponencial para o torque do motor porém mudando o valor do parâmetro  $a$  para  $a = 0.01$ . Neste caso o motor não gira, mas apresenta uma oscilação em torno do valor estacionário, e mostramos as estabilidade assintóticas do bloco e do pêndulo (Fig.6).

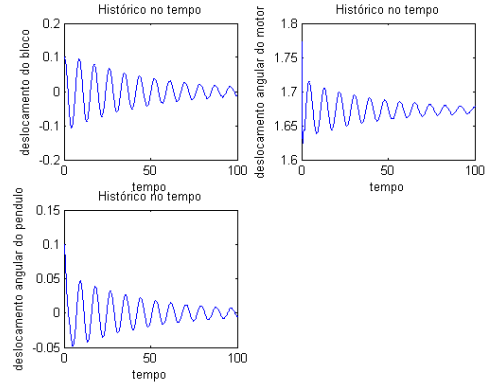


Figura 6: Movimento estável do bloco, variação angular do motor e variação angular do pêndulo. Torque exponencial e  $a=0.01$ .

Simulamos também sob a condição ligeiramente fora da estabilidade, tomando valores de  $a$  maiores que o valor crítico  $a_c = 0.0980665$ , e condições iniciais  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ . Mostramos a evolução temporal do bloco e do pêndulo na região de ressonância 2:1, quando o motor opera com torque linear. Na figura 7 utilizamos  $a = 0.105$  e observamos que o motor não gira, mas quando utilizamos  $a = 0.11$  (Fig. 8) o motor passa a girar, e a cada volta da massa excêntrica, o bloco e o pêndulo recebem impulsos que vão se amortecendo. Na figura 9 o motor opera com torque exponencial e adotamos o valor de  $a = 0.0975$ . Observamos que o motor não gira, porém quando adotamos  $a = 0.098$  (Fig.10), após um pequeno intervalo de tempo o motor passa a girar. Percebe-se que há uma interação entre o bloco, o motor e o pêndulo causando assim o movimento apresentado. Podemos notar essa mudança de comportamento do motor no gráfico velocidade do motor *versus* tempo (Fig. 10). Este comportamento semelhante para torque linear e não linear ocorre na vizinhança de  $a_c$ , e percebe-se que o motor passa a girar para um valor de  $a$  próximo de  $a_c$ .

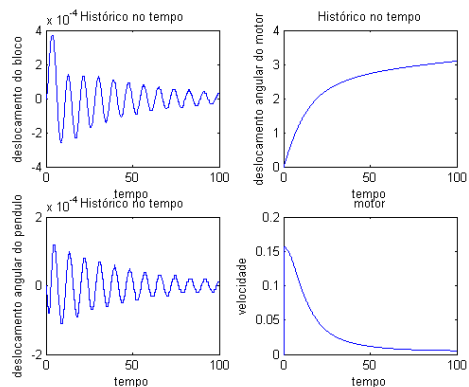


Figura 7: Histórico no tempo do bloco, motor, pêndulo e velocidade do motor respectivamente. Torque linear e  $a = 0.105$ .

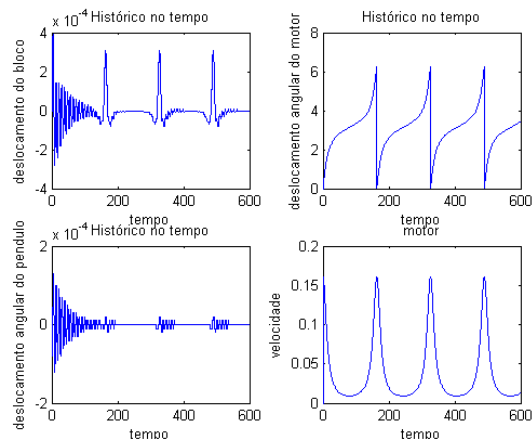


Figura 8: Histórico no tempo do bloco, motor, pêndulo e velocidade do motor respectivamente. Torque linear e  $a=0.110$ .

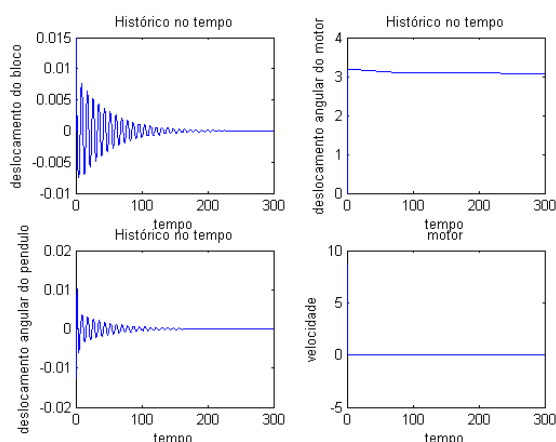


Figura 9: Histórico no tempo do bloco, motor, pêndulo e velocidade do motor respectivamente. Torque exponencial e  $a=0.0975$ .

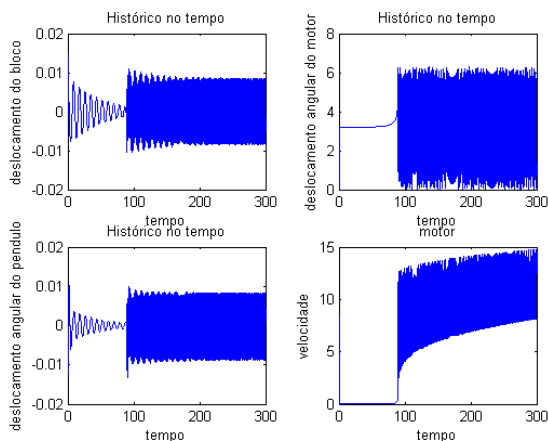


Figura 10: Histórico no tempo do bloco, motor, pêndulo e velocidade do motor respectivamente. Torque exponencial e  $a=0.098$ .

Na figura 11 estão representados os valores das amplitudes máximas do bloco e do pêndulo em função da frequência de rotação do motor ( $f_m$ ) no caso de torque linear. A frequência do motor passa pela frequência natural do bloco e do pêndulo. As amplitudes de oscilação comportam-se de maneira regular, apresentando apenas um aumento da amplitude durante a passagem pela ressonância onde podemos notar o efeito Sommerfeld que ocorre na passagem  $f_m = 0.7210$ . Mostramos também na figura 12, a variação da frequência do motor em função do parâmetro de controle  $a$ . A variação é linear e crescente.

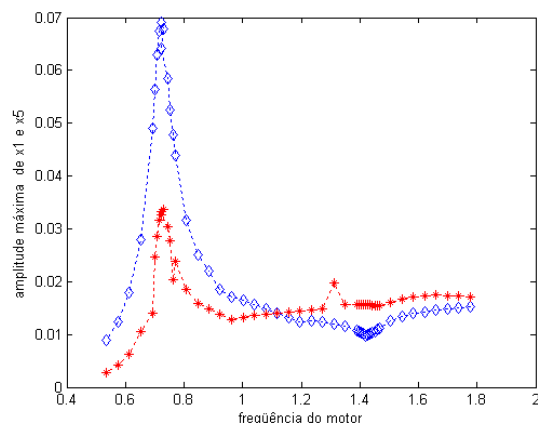


Figura 11: Média das amplitudes máximas do bloco (o) e do pêndulo (\*) em função da frequência  $f_m$ . Torque linear.

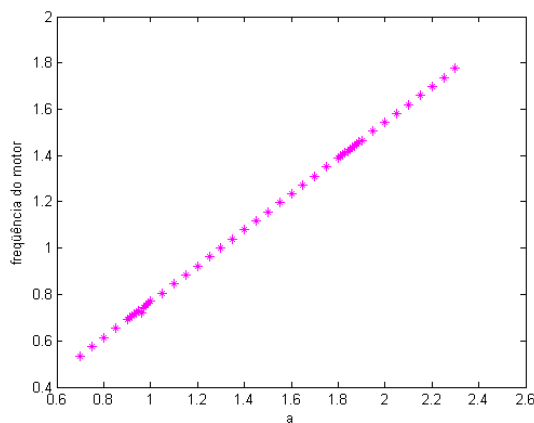


Figura 12: Variação linear da frequência do motor em função do parâmetro de controle. Torque linear.

Para o torque exponencial não foi possível obter o gráfico das amplitudes máximas do bloco e do pêndulo em função da frequência de rotação do motor ( $f_m$ ). Neste caso, a frequência do motor aumenta bruscamente em torno de  $a = a_c$ , caracterizando o fenômeno de salto. Podemos observar na figura 13 que para  $a = 0.0979$  temos

$f_m = 0.03053$ , para  $a = 0.0980$  temos  $f_m = 0.74647$  e para  $a = 0.0981$  temos  $f_m = 3.65468$ .

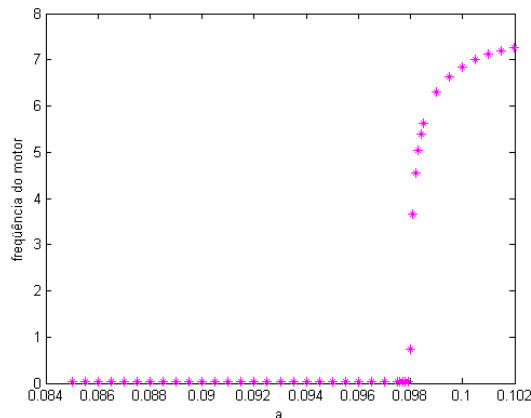


Figura 13: Variação da frequência do motor em função do parâmetro de controle. Torque exponencial.

## Conclusão

Em geral, adota-se dois modelos matemáticos para o torque do motor que representa a fonte de perturbação de um sistema dinâmico não ideal. O objetivo deste trabalho foi o de mostrar a diferença existente no comportamento do sistema dinâmico perto de um ponto de equilíbrio estável, quando se utiliza um modelo linear ou um modelo exponencial.

Como esperado, quando se adota o modelo linear para o torque, as respostas do sistema dinâmico são mais regulares, ao passo que, quando se utiliza o modelo exponencial, as respostas tornam-se mais irregulares. Neste caso, para estabelecer o equilíbrio estável é preciso utilizar o torque como parâmetro de controle.

Mostramos também o comportamento do sistema longe do ponto de equilíbrio, assim como perto do ponto de equilíbrio, e evidenciamos a sensibilidade do sistema na vizinhança de  $a_c$ , onde ocorre uma bifurcação. No caso de utilizar o modelo linear para o torque do motor, a bifurcação ocorre para um valor de  $a$  maior que  $a_c$  ( $0.105 < a < 0.11$ ). Contrariamente, quando o modelo é exponencial, a bifurcação acontece para um valor de  $a$  menor que  $a_c$  ( $0.00975 < a < 0.098$ ).

## Referências

[1] J. M. Balthazar, R. M. L. R. F. Brasil, H. I. Weber, A. Felini, D. Belato, J. L. P. Felix, Recent results on vibrating problems with limited power supply, em "6<sup>th</sup> Conference on dynamical systems. Theory and Applications", pp.27-50, 2001.

[2] J. M. Balthazar, D.T. Mook, H.I. Weber, A. Felini, D. Belato, M. C. Mattos, S. Wiecezorek, On vibrating systems with a limited power supply and their applications to engineering science. In Anais do Seminário Brasileiro de Análise, pp. 137-227, 1999.

[3] D. Belato, Non linearities of the electromotor-pendulum (in portuguese), Master Thesis, Universidade de Campinas, 1998.

[4] D. Belato, Nonlinear analysis of non ideal holonomic dynamical systems (in portuguese), Doctor Thesis, Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP, 2001.

[5] A. O. Dias, M. Tsuchida, Dinâmica do sistema pêndulo mecânico não ideal nas principais ressonâncias, em "Proceedings DINCON 2002" (J. M. Balthazar, M. Boaventura, G. N. Silva, M. Tsuchida, eds.).

[6] A. H. Nayfeh, and D. T. Mook, Nonlinear Oscillations, Willey, USA, 1979.