Refinamento e Simplificação de Malhas Isotrópicas e Anisotrópicas

Alexandre De Lacassa[*], **Antonio Castelo Filho**
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, ICMC, USP,
13560-970, São Carlos, SP
E-mail: lacassa@icmc.usp.br, castelo@icmc.usp.br.

1 Introdução

Em muitos problemas de simulação de fenômenos físicos ou fenômenos de engenharia, o uso das malhas é considerado um componente muito importante. Uma malha é uma aproximação de uma dada geometria por um conjunto de elementos mais simples, tais como triângulos e quadriláteros (caso bidimensional) ou tetraedros, prismas, pirâmides e hexaedros (caso tridimensional). Nesse trabalho, as malhas de interesse são as não-estruturadas e compostas por triângulos.

A escolha de uma malha é fortemente influenciada pelo desempenho e precisão dos resultados da simulação. O desempenho depende do número de elementos a serem processados, ou seja, quanto maior for a área coberta por cada elemento da malha, menos elementos são necessários, por conseguinte, mais rápida será a simulação. A precisão nos resultados da simulação está relacionada tanto com o formato quanto com o tamanho dos elementos. Diferente do desempenho, quanto menor forem os elementos, mais precisos serão os resultados. O formato dos elementos também influencia a precisão, em geral, elementos mais próximos dos equiláteros são preferidos. Como é possível observar, desempenho e precisão são requisitos conflitantes e geralmente é necessário fazer uma ponderação entre eles. Para um determinado grupo de aplicações, o melhor compromisso entre desempenho e precisão é conseguido com elementos finos, longos e corretamente alinhados sobre o domínio onde a malha está definida. São as chamadas malhas anisotrópicas [2]. Além disso, um método de refinamento anisotrópico pode melhorar ainda mais a precisão dos resultados e, no mesmo sentido, um método de simplificação anisotrópico pode melhorar o desempenho de uma simulação.

O principal objetivo desse trabalho é desenvolver métodos de refinamento e simplificação de malhas isotrópicas e anisotrópicas, usando como base, e tendo como ponto de partida, os métodos de refinamento propostos por Jim Ruppert [5] e Paul Chew [3], e o método de simplificação proposto por Olivier Devillers [4].

[*]bolsista de Mestrado FAPESP

2 Refinamento

Os algoritmos de refinamento Delaunay para geração de malhas trabalham mantendo-se uma triangulação de Delaunay que é refinada pela inserção de vértices cuidadosamente localizados até que a malha atinja certas condições sobre a qualidade de um elemento e seu tamanho.

A vantagem destes algoritmos é o fato de explorarem características importantes da triangulação de Delaunay. Uma destas características importantes é que a triangulação de Delaunay maximiza o ângulo mínimo de todas as possíveis triangulações de um conjunto de pontos. Outra característica muito importante é que as operações de inserção de vértices são locais, ou seja, o ato de inserir um vértice em uma determinada região de uma malha para melhorar a qualidade dos elementos não interfere em outra região da malha.

Um ponto importante nos algoritmos de refinamento Delaunay é descobrir o local ideal no qual o novo vértice deve ser inserido. Deve-se evitar ângulos pequenos, portanto, o local ideal para inserir um vértice é o mais longe possível dos outros vértices, assim evitando arestas pequenas o que por sua vez resultariam em triângulos muito finos. Como não há vértices no circuncírculo de um triângulo de Delaunay, uma triangulação de Delaunay é a estrutura ideal para se encontrar o ponto mais distante dos outros vértices.

Atuando sobre uma malha gerada pela triangulação de Delaunay, o algoritmo de refinamento de Ruppert percorre a malha inserindo um vértice no circuncentro de um triângulo que tenha ângulo mínimo menor que um determinado valor. Para verificar o ângulo mínimo de um triângulo é usada a *razão cicunraio-menor aresta* do triângulo, que é uma medida de qualidade usada em malhas triangulares. Um triângulo tem boa qualidade se for próximo ao equilátero. Ao final do algoritmo todos os triângulos tem *razão cicunraio-menor aresta* menor que um dado valor estipulado inicialmente.

3 Simplificação

Considerando uma malha inicial que seja uma triangulação de Delaunay para um domínio Ω, a simplificação Delaunay desta malha busca remover da triangulação as arestas que falham em um critério pré-estabelecido. Para remover essas arestas faz-se a remoção do vértice inserido mais recentemente na triangulação, a fim de manter a propriedade de Delaunay da malha. O método a ser utilizado para a remoção de vértices de uma triangulação de Delaunay é discutido no trabalho de Devillers [4].

Ao retirar um vértice e suas arestas incidentes, cria-se um "buraco"na triangulação. O algoritmo refaz a triangulação de Delaunay somente no interior deste "buraco", sem afetar outras regiões da malha. Algumas idéias que auxiliam no desenvolvimento do algoritmo são baseadas no texto de Xu et al.[6].

4 Anisotropia

Uma malha é considerada boa se oferecer uma boa aproximação linear por partes g para uma função f que procura discretizar, isto é, se as curvaturas calculadas a partir de f nos vértices da malha forem próximas. Se para qualquer ponto p no domínio da função f as curvaturas tomadas em todas as direções forem próximas, uma malha isotrópica geralmente é usada para aproximar f. Entretanto, em algumas aplicações tais funções tem grandes variações nas curvaturas em diferentes direções. É possível obter uma boa precisão com elementos próximos ao equilátero, mas podemos obter a mesma precisão com poucos elementos se utilizarmos uma malha *anisotrópica*.

Em uma malha anisotrópica, os elementos longos e finos são orientados na direção onde a curvatura é pequena. Em muitas aplicações o uso de malhas anisotrópicas representa o melhor compromisso entre precisão(menor erro de aproximação) e desempenho(menos elementos para processar). Existem aplicações nas quais a geração ou o uso de uma malha isotrópica fina o bastante para obter uma solução precisa, torna-se computacionalmente impraticável devido ao número de elementos muito grande da malha, no entanto uma malha anisotrópica pode oferecer uma boa precisão com menos elementos, melhorando assim o desempenho.

O método mais conhecido para julgar se um elemento anisotrópico é adequado, segundo D'Azevedo[1], é construir um mapeamento afin que leva elementos do espaço físico (anisotrópico) para o espaço isotrópico, onde o limitante para a curvatura em um ponto é isotrópico. Um elemento fino no espaço físico que se torna equilátero quando mapeado para o espaço isotrópico é ideal para minimizar o erro de interpolação $\|f - g\|$.

Portanto, para gerar o refinamento e a simplificação anisotrópicos de uma malha, é necessário primeiro mapear os seus vértices para o espaço isotrópico e então aplicar os algoritmos de refinamento e simplificação neste espaço, retornando ao final para o espaço anisotrópico através da função inversa do mapeamento realizado anteriormente.

Referências

[1] E. F. D'Azevedo, Are Bilinear Quadrilaterals Better Than Linear Triangles?, Technical Report ORNL/TM-12388, Computer Science and Mathematics Division - Oak Ridge National Laboratories - Oak Ridge - Tennesse, August 1993, http://citeseer.ist.psu.edu/491362.html.

[2] F. J. Bossen e P. S. Heckbert, A pliant method for anisotropic mesh generation, Fifth International Meshing Roundtable, pp. 63-74, 1996.

[3] L. P. Chew, Guaranteed-quality triangular meshes. Technical Report TR-89-983, Department of Computer Science, Cornell University, 1989.

[4] O. Devillers, On deletion in delaunay triangulations, em "SCG'99: Proceedings of the fifteenth annual symposium on computational geometry"pp. 181-188, ACM Press, 1999.

[5] J. Ruppert, A delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation, *Journal of Algorithms*, 18(3):548-585, 1995.

[6] X. Xu e C. C. Pain e A. J. H. Goddard e C. R. E. de Oliveira, An Automatic Adaptive Meshing Technique for Delaunay Triangulations, *Computer Methods in Apllied Mechanics and Engineering*, 161:297-303, 1998.