

Operação Ótima para Redes Hidráulicas Malhadas através da Especialização de Métodos de Pontos Interiores

Aline M. Lima,

Aurelio R. L. Oliveira,

IMECC - Instituto de Matemática, Estatística, e Ciência da Computação, UNICAMP,
13081-970, Campinas, SP

E-mail: amlima@ime.unicamp.br, aurelio@ime.unicamp.br.

1 Introdução

O problema de captação de água de um sistema de abastecimento tem como objetivo minimizar o custo de bombeamento de água para posterior tratamento. Este custo está diretamente relacionado à, localização das estações de bombeamento, eficiência dos motores e quantidade de água a ser captada.

No problema de distribuição, as perdas de água são importantes e a função objetivo deve considerá-las em conjunto com o custo de bombeamento. O problema se torna mais complexo pois as perdas em cada trecho variam de forma não linear com a vazão de água.

1.1 O Modelo Matemático

Primeiramente, apresentaremos o modelo de captação/distribuição de água para uma rede malhada:

$$\text{minimizar } \alpha \sum_{i=1}^n k_i q_i^e + \beta c^t q \quad (1)$$

$$\text{sujeito a } Aq = p - d, \quad Tq = 0 \quad (2)$$

$$q^{min} \leq q \leq q^{max} \quad (3)$$

$$p^{min} \leq p \leq p^{max} \quad (4)$$

onde:

n representa o número de trechos;

q representa a vazão em cada trecho de tubulação;

p representa a pressão nos nós;

e representa o expoente da vazão na perda de carga, por exemplo 1,85 na fórmula empírica de Hazen-Williams para distribuição;

k_i representa a constante de proporcionalidade de perda no trecho i (função do diâmetro, comprimento e fator de atrito obtido pela fórmula de Colebrook-White para o trecho);

c representa o custo de bombeamento;

A representa a matriz de incidência da rede de distribuição;

T representa a matriz de perdas nas malhas da rede de distribuição/captação;

d representa as demandas de água em cada nó;
 q^{max} e q^{min} são os limites de fluxo de água dados pelo produto da respectiva velocidade pelo diâmetro da tubulação;

p^{max} e p^{min} são os limites de pressão;

α e β são ponderações dos objetivos a minimizar.

O sistema de distribuição/captação é representado por um fluxo em redes com limites na velocidade (convertida em vazão) e pressão da água. As equações em (2) representam as leis de Kirchhoff para nós e malhas respectivamente [3, 4]. Portanto, o conjunto de restrições para este problema é linear onde, as equações em (2) representam a rede de captação/distribuição e as equações (4) representam os limites de vazão e pressão do sistema de abastecimento. A função objetivo (1) considera a perda de água em cada trecho buscando assim a solução de menor perda global, ao contrário da função objetivo que minimiza somente a soma das vazões normalmente utilizada [1]. O custo de bombeamento também é considerado e os dois objetivos combinados através das ponderações.

Para simplificar o desenvolvimento do método, faremos as seguintes alterações no modelo:

- Mudança de variáveis $\tilde{q} = q - q^{min}$ e $\tilde{p} = p - p^{min}$, reduzindo o número de variáveis de folga do problema.

- As ponderações α e β terão valor unitário.

- O expoente da vazão e será igual a dois, e então teremos um problema quadrático. Primeiramente, calcularemos q considerando este valor para e , depois, para compensar esta aproximação, incorporamos a diferença na matriz K , e então recalcularemos q .

Após estas alterações, as condições de otimalidade são dadas por:

$$\text{factibilidade primal: } \begin{cases} Aq - p = d_1 \\ Tq = d_2 \\ q + s_q = q^{max} \\ p + s_p = p^{max} \\ (q, s_q, p, s_p) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{factibilidade dual: } \begin{cases} B^t y + z_q - w_q - Kq = k_1 \\ -y(p) + z_p - w_p = c \\ (z_p, w_p, z_q, w_q) \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{condições de complementaridade: } \begin{cases} QZ_q e = 0 \\ PZ_p e = 0 \\ S_q W_q e = 0 \\ S_p W_p e = 0, \end{cases}$$

onde $k_1 = 2Kq^{min}$, $d_1 = p^{min} - d - Aq^{min}$, $d_2 = -Tq^{min}$, $s_q = q^{max} - q$ e $s_p = p^{max} - p$ são as variáveis de folga do problema primal, z_q e z_p são as variáveis de folga do problema dual, $B^t = \begin{pmatrix} A^t & T^t \end{pmatrix}$ e $y(p)$ representa os elementos da variável dual y correspondentes aos nós de bombeamento. Utilizamos a notação $Q = \text{diag}(q)$ e $e = (1, 1, \dots, 1)^t$.

Então, de posse das condições de otimalidade, desenvolveremos o método de pontos interiores primal-dual para este problema.

2 Método Primal-Dual Aplicado ao Modelo de Fluxos em Rede

Aplicando o método de Newton às condições de otimalidade, obtemos:

$$\begin{cases} Adq - dp = r_1 \\ Tdq = r_2 \\ dq + ds_q = r_3 \\ dp + ds_p = r_4 \\ B^t dy + dz_q - dw_q - Kd_q = r_5 \\ -dy(p) + dz_p - dw_p = r_6 \\ Z_q dq + Qdz_q = r_7 \\ Z_p dp + Pdz_p = r_8 \\ W_q ds_q + S_q dw_q = r_9 \\ W_p ds_p + S_p dw_p = r_{10}, \end{cases} \quad (5)$$

onde residuals are:

$$\begin{cases} r_1 = d_1 + p - Aq \\ r_2 = d_2 - Tq \\ r_3 = q^{max} - q - s_q \\ r_4 = p^{max} - p - s_p \\ r_5 = k_1 - B^t y - z_q + w_q + Kq \\ r_6 = c + y(p) - z_p + w_p \\ r_7 = \mu e - QZ_q e \\ r_8 = \mu e - PZ_p e \\ r_9 = \mu e - S_q W_q e \\ r_{10} = \mu e - S_p W_p e. \end{cases}$$

O sistema (5) pode ter sua dimensão substancialmente reduzida através de eliminação de variáveis.

Primeiramente, eliminamos as variáveis de folga:

$$\begin{aligned} ds_q &= r_3 - dq; \\ ds_p &= r_4 - dp; \\ dz_q &= Q^{-1}(r_7 - Z_q dq); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} dz_p &= P^{-1}(r_8 - Z_p dp); \\ dw_q &= S_q^{-1}(r_9 - W_q ds_q); \\ dw_p &= S_p^{-1}(r_{10} - W_p ds_p). \end{aligned}$$

Com essas substituições, o sistema (5) se reduz a:

$$\begin{cases} Adq - dp = r_1 \\ Tdq = r_2 \\ B^t dy - D_q dq = r_a \\ -dy(p) - D_p dp = r_b, \end{cases} \quad (6)$$

onde $D_q = Q^{-1}Z_q + S_q^{-1}W_q + K$, $D_p = P^{-1}Z_p + S_p^{-1}W_p$, $r_a = r_5 - Q^{-1}r_4 + S_q^{-1}r_9 - S_q^{-1}W_q r_3$ e $r_b = r_6 - P^{-1}r_7 + S_p^{-1}r_{10} - S_p^{-1}W_p r_4$.

Note que apenas inversas de matrizes diagonais estão envolvidas. Eliminando dp e dq em (6) temos:

$$\begin{aligned} dq &= -D_q^{-1}(r_a - B^t dy); \\ dp &= -D_p^{-1}(r_b + dy(p)). \end{aligned}$$

Substituindo nas demais equações de (6), temos:

$$\begin{cases} AD_q^{-1}B^t dy + D_p^{-1}dy(p) = r_1 + AD_q^{-1}r_a - D_p^{-1}r_b \\ TD_q^{-1}B^t dy = r_2 + TD_q^{-1}r_a, \end{cases}$$

lembrando que $C = \begin{pmatrix} A \\ T \end{pmatrix}$.

Definindo $D = \begin{pmatrix} -D_p^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$, $dy(p) = Ddy$ e $\tilde{r} =$

$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, e juntando as equações temos:

$$(BD_q^{-1}B^t + D)dy = r, \quad (7)$$

onde $r = \tilde{r} + BD_q^{-1}r_a - Dr_b$.

O fato de a matriz B ter dimensão $n + 1 \times n$ é bastante relevante. Esta característica pode ser utilizada para reduzir o esforço computacional por iteração dos métodos de pontos interiores, assim, se formarmos a matriz não singular $\tilde{B} = [B \ e_j]$, onde e_j representa um vetor canônico (vetor formado pelas colunas da matriz identidade), temos que o sistema (7) pode ser reescrito na seguinte forma:

$$(\tilde{B}\tilde{D}_q^{-1}\tilde{B}^t + \tilde{D})dy = r, \quad (8)$$

onde \tilde{D}_q^{-1} incorpora o elemento diagonal retirado de D para formar \tilde{D} . A resolução de (8) se dá em duas etapas. Na primeira, um sistema linear contendo apenas a matriz $\tilde{B}\tilde{D}_q^{-1}\tilde{B}^t$ é resolvido. Vale observar que como \tilde{B} é quadrada, a resolução do sistema com a matriz $\tilde{B}\tilde{D}_q^{-1}\tilde{B}^t$ fica muito barata, pois apenas a matriz diagonal \tilde{D}_q varia a cada iteração. Então, apenas uma decomposição de \tilde{B} é necessária e pode ser realizada antes da aplicação do método iterativo.

Na segunda etapa, a fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury [5] é aplicada para a obtenção

de dy :

$$\begin{aligned} W &= \tilde{B}^{-1}E \\ Z &= W^t \tilde{D}_q W \\ v &= (\tilde{B} \tilde{D}_q^{-1} \tilde{B}^t)^{-1} r \\ dy &= v - (\tilde{C} \tilde{D}_q^{-1} \tilde{B}^t)^{-1} E (\tilde{D}^{-1} + Z)^{-1} E^t v, \end{aligned}$$

onde E é formada por vetores canônicos correspondentes aos elementos diagonais não nulos de \tilde{D} . Conseqüentemente, W é fixa para uma determinada rede e pode ser calculada antes da aplicação do método iterativo.

Calculadas as direções, podemos resumir o método primal-dual como segue:

Sejam $x = (q, p, s_q, s_p)$ e $t = (z_q, z_p, w_q, w_p)$.

Método de Pontos Interiores Primal-Dual:

Dados $(x^0, t^0) > 0$ e y^0 . Para $k = 0, 1, 2, \dots$, faça

- (1) Tome $\sigma^k \in [0, 1)$ e calcule μ^k .
- (2) Calcule as direções de busca (dx^k, dy^k, dt^k) .
- (3) Escolha o tamanho de passo para que o ponto continue interior $\alpha^k = \min(1, \tau^k \rho_p^k, \tau^k \rho_d^k)$ onde $\tau^k \in (0, 1)$, $\rho_p^k = \frac{-1}{\min_i \left(\frac{dx_i^k}{x_i^k} \right)}$ e $\rho_d^k = \frac{-1}{\min_i \left(\frac{dt_i^k}{t_i^k} \right)}$.
- (4) Calcule o novo ponto $x^{k+1} = x^k + \alpha^k dx^k$ e $(y^{k+1}, t^{k+1}) = (y^k, t^k) + \alpha^k (dy^k, dt^k)$.

O maior esforço do método consiste na resolução do sistema linear resultante da eliminação de variáveis. Para resolver este sistema utilizamos a fórmula de Sherman-Morrison-Woodbury [5], o que nos permite reduzir bastante o esforço computacional [6]. A matriz \tilde{B} é uma matriz quadrada, que só depende dos dados do problema e, então apenas uma decomposição dessa matriz é necessária e pode ser realizada antes do processo iterativo.

Neste trabalho, vamos considerar as perdas de água, não só na função objetivo, mas também nas restrições. Esta perda é uma função não-linear da vazão. Para resolver o problema com restrições não-lineares, inicialmente resolvemos o modelo (2) e calculamos as perdas em cada trecho i da rede de distribuição através da relação $k_i q_i^2$. As perdas relativas são então utilizadas como coeficientes da matriz de incidência da rede substituindo as constantes $+1$ e -1 . A matriz assim construída que passa a representar um grafo generalizado (grafo com perdas). O novo problema é resolvido obtendo novos coeficientes para o grafo generalizado. O processo é repetido até que a norma da diferença dos fluxos entre uma solução e a anterior seja menor que uma tolerância estabelecida [2]. Juntamente com isso, temos que fazer a alteração da matriz K da seguinte forma. Calculamos \tilde{q}_i para a função objetivo com $k_i q_i^2$,

depois incorporamos a diferença $k_i q_i^{-0.2}$ em cada entrada da matriz K , e finalmente calculamos o vetor das vazões q .

Uma vez que a captação/distribuição de sistemas de abastecimento de água tem uma formulação muito próxima ao fluxo de potência ótimo DC, para o qual já foram obtidos resultados satisfatórios [2, 6], espera-se que os métodos de pontos interiores aplicados a estes problemas apresentem o mesmo desempenho computacional tanto com respeito à velocidade quanto à robutez.

Referências

- [1] R. Almeida and P. S. F. Barbosa, Modelo Computacional para a Gestão Operacional Ótima de Sistemas de Distribuição de Água, em “Anais do V Congresso de Engenharia Civil” pp. 1-15, Juiz de Fora, MG, 2002.
- [2] A. T. Azevedo, “Aplicação de Métodos de Pontos Interiores a Problemas de Manufatura e Engenharia Elétrica”, Dissertação de Mestrado, FEEC – UNICAMP, Campinas, SP, 2002.
- [3] W. F. Curi and M. B. M. Firmino, Um Método de Dimensionamento Ótimo de Redes Malhadas e não Malhadas via Programação Não-Linear e Linear, em “Anais do Seminário Planejamento, Projeto e Operação de Redes de Abastecimento de Água: o Estado da Arte e Questões Avançadas”, João Pessoa, PB, 2002.
- [4] W. F. Curi and M. B. M. Firmino, Prehdim - Projeto de Redes Hidráulicas com Dimensionamento Malhado, em “Anais do XXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering – CILAMCE” pp. 1-15, Recife, PE, 2004.
- [5] G. H. Golub and C. F. Van Loan, “Matrix Computations Third Edition”, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, Maryland, 1996.
- [6] A. R. L. Oliveira, S. Soares and L. Nepomuceno, Optimal Active Power Dispatch Combining Network Flow and Interior Point Approaches, *IEEE Transactions on Power Systems*, 18(4) (2003) 1235–1240.