

# Uma nova técnica de interpolação de ações de domínio na formulação da Quase-Dupla Reciprocidade

Carlos Friedrich Loeffler Neto, Allan Costa Jardim\*

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PPGEM, UFES,  
29075-010, Vitória, ES

E-mail: carlosloeffler@ct.ufes.br, allanjardim@yahoo.com.br,

## 1 Introdução

Um considerável avanço na aplicação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) em muitas classes de problemas pertinentes à teoria de campo escalar foi introduzida por Nardini e Brebbia (vide referência [1]), quando apresentaram a Formulação da Dupla Reciprocidade. Casos transientes, dinâmicos e convectivos puderam ser abordados. De modo geral, outras parcelas da equação de governo, além do Laplaciano, são consideradas como ações de domínio. Recentemente, Loeffler e Mansur (2003) desenvolveram a técnica da Quase-Dupla Reciprocidade. Tal técnica utiliza-se de uma condição de incompressibilidade para transformar parte do termo que representa as ações de domínio em um termo que pode ser representado por integrais ao longo do contorno. A parcela restante é aproximada por uma combinação linear de funções e, através de operações matemáticas, chega-se a expressões contendo somente integrais ao longo do contorno. O presente texto sugere uma outra aproximação de domínio, mais completa, visto que as aproximações usuais não geram bons resultados em alguns casos nos quais fluxos ou forças sejam constantes. A expectativa é que o uso de funções mais completas traga melhorias significativas na aplicação do método em todos os casos.

## 2 Quase-Dupla Reciprocidade

Considere a equação de governo abaixo escrita em notação indicial<sup>1</sup>:

$$Ku_{,ii} = u_{,i} v_i. \quad (1)$$

Tal equação governa problemas difusivos-convectivos, nos quais um diferencial de temperatura ( $u$ ) é aplicado num fluido de condutividade térmica constante<sup>2</sup> ( $K$ ), que escoar com velocidade

( $v$ ), por exemplo, num volume de controle elementar. Outros problemas de engenharia também podem ser modelados pela mesma.

Para empregar a formulação com Quase-Dupla Reciprocidade torna-se necessário escrever o termo não homogêneo da equação (1), chamado termo advectivo, de modo que:

$$u_{,i} v_i = (uv_i)_{,i}. \quad (2)$$

Tal expressão é verdadeira somente se o escoamento envolve fluidos incompressíveis [4], tais que:

$$v_{i,i} = 0, \quad (3)$$

pois, assim,

$$(v_i u)_{,i} = v_{i,i} u + u_{,i} v_i = u_{,i} v_i. \quad (4)$$

Logo, a equação de governo (1) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$Ku_{,ii} = (v_i u)_{,i}. \quad (5)$$

Considerando o procedimento típico do Método dos Elementos de Contorno, usa-se uma função  $u^*$ , chamada solução fundamental, que governa o seguinte problema correlato:

$$Ku^*_{,ii} = -\Delta(X^i; X_j), \quad (6)$$

onde  $\Delta(X^i; X_j)$  é o delta de Dirac, e, multiplicando-a em ambos os membros da expressão (5) e integrando-a ao longo do volume de controle ( $\Omega$ ) vem:

$$\int_{\Omega} Ku_{,ii} u^* d\Omega = \int_{\Omega} (v_i u)_{,i} u^* d\Omega, \quad (7)$$

que é chamada "Forma Integral Forte" da equação de governo (5).

Procedendo com a Integração por Partes, o teorema da Divergência e as propriedades do delta de Dirac, o lado esquerdo da equação (7) torna-se:

$$\int_{\Omega} Ku_{,ii} u^* d\Omega = K[c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} [uq^* - qu^*] d\Gamma], \quad (8)$$

\*bolsista de Mestrado/CAPES

<sup>1</sup>Também chamada Notação de Einstein

<sup>2</sup>Em geral  $K$  representa propriedades materiais do objeto-problema

onde  $\Gamma$  representa o contorno de  $\Omega$ .

O lado direito da equação (7) merece atenção especial, visto que trata-se do termo convectivo, e, o mesmo é considerado como similar a uma ação de domínio.

Tal termo é totalmente aproximado por uma combinação linear de funções radiais na técnica da Dupla Reciprocidade. Porém, na Quase-Dupla Reciprocidade, opera-se da maneira descrita a seguir.

Usando Integração por Partes vem:

$$\int_{\Omega} (v_i u)_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Omega} (v_i u u^*)_{,i} d\Omega - \int_{\Omega} (v_i u) u^*_{,i} d\Omega. \quad (9)$$

A primeira integral do lado direito da equação transforma-se numa integral ao longo do contorno, devido à aplicação do Teorema da Divergência. Assim a equação (9) torna-se:

$$\int_{\Omega} (v_i u)_{,i} u^* d\Omega = \int_{\Gamma} v_i n_i u u^* d\Gamma - \int_{\Omega} (v_i u) u^*_{,i} d\Omega. \quad (10)$$

Toda atenção agora deve ser dada à segunda integral do lado direito da equação anterior. Na tentativa de transformar tal termo numa integral ao longo do contorno, faz-se uso da seguinte aproximação:

$$b_i = v_i u \approx \alpha_p^j \eta_{pi}^j. \quad (11)$$

É preciso também, estabelecer uma primitiva de  $\eta$  tal que:

$$\Psi_{p,i}^j = \eta_{pi}^j. \quad (12)$$

Assim, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} (v_i u) u^*_{,i} d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Omega} \Psi_{p,i}^j u^*_{,i} d\Omega. \quad (13)$$

Novamente usando Integração por Partes e o Teorema da Divergência, tem-se:

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \Psi_{p,i}^j u^*_{,i} d\Omega = \alpha_p^j \left[ \int_{\Gamma} \Psi_{p,i}^j u^*_{,i} n_i d\Gamma + \int_{\Omega} \Psi_{p,i}^j u^*_{,ii} d\Omega \right]. \quad (14)$$

Usando agora a solução fundamental ( $u^*(\xi; X)$ ) e as propriedades do delta de Dirac, vem:

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \Psi_{p,i}^j u^*_{,i} d\Omega = \alpha_p^j \left[ \int_{\Gamma} \Psi_{p,i}^j u^*_{,i} n_i d\Gamma + c(\xi) \Psi_p^j(\xi) \right]. \quad (15)$$

Assim a equação integral completa fica:

$$K[c(\xi)u(\xi) + \int_{\Gamma} [uq^* - qu^*]d\Gamma] = - \int_{\Gamma} v_i n_i u u^* d\Gamma + \alpha_p^j \left[ \int_{\Gamma} \Psi_{p,i}^j u^*_{,i} n_i d\Gamma + c(\xi)u\Psi_p^j(\xi) \right]. \quad (16)$$

A próxima etapa é a discretização do contorno. Elementos retilíneos constantes são usualmente satisfatórios em problemas de campo escalar e utilizados na maioria dos Trabalhos. Qualquer que seja o tipo de elemento usado, procedimentos operacionais típicos do M.E.C. transformam a equação (16) na seguinte equação matricial:

$$HU - GQ = -BU + H\Psi\alpha. \quad (17)$$

O próximo passo é eliminar o vetor  $\alpha$ . Para tanto, observa-se a equação (11) e verifica-se a possibilidade de reescrevê-la assim:

$$\alpha = \eta^{-1}b = \eta^{-1}VU, \quad (18)$$

ou seja, teremos a equação integral:

$$HU - GQ = -BU + H\Psi\eta^{-1}VU, \quad (19)$$

assim, fazendo

$$M = H\Psi\eta^{-1}V \quad (20)$$

a equação integral final fica:

$$(H + B - M)U = GQ. \quad (21)$$

### 3 Funções de Interpolação de Ações de Domínio

Na Dupla-Reciprocidade Tradicional, faz-se o uso de funções de interpolação de campo bastante simples como as funções radiais:

$$f(X^i; X_j) = R(X^i; X_j), \quad (22)$$

onde  $R$  é a distância euclideana entre o ponto campo e o ponto fonte.

Maiores detalhes podem ser colhidos em Partridge et al..

Com a Quase-Dupla Reciprocidade, outras estruturas devem ser utilizadas como, por exemplo:

$$\Psi_{p,i}^j = \eta_{pi}^j = 3RR_i R_p + R^3 \delta_{ip}, \quad (23)$$

onde  $\delta_{ip}$  é o delta de Kronecker.

Para problemas difusivo-advectivos com condições de Dirichlet e campos térmicos dados por:

$$u = e^{x+y} \quad (24)$$

$$u = e^{xy} \quad (25)$$

os resultados foram excelentes.

Porém, em problemas bidimensionais com condições de contorno do primeiro tipo na forma:

$$u = e^x + e^y \quad (26)$$

a formulação apresentou resultados sofríveis, com o erro apresentando-se estável e independente da

velocidade de escoamento. Na realidade, há fortes indícios que a inexatidão da formulação com Dupla-Reciprocidade se deva à falta de completividade da função (23) em casos nos quais o fluxo difusivo seja constante em alguma parte do domínio.

Na tentativa de contornar tal situação, a adição de uma nova função ( $\rho$ ) foi considerada. Ou seja, a equação (12) torna-se, agora:

$$b_i = v_i u \approx \alpha_p^j (\eta_{pi}^j + \rho_{pi}^j). \quad (27)$$

A nova integral de domínio que aparece devida à adição da função  $\rho$ , pode ser transformada assim:

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \rho_{pi}^j u^*_{,i} d\Omega = \alpha_p^j \left[ \int_{\Omega} (\rho_{pi}^j u^*)_{,i} d\Omega + \int_{\Omega} \rho_{pi}^j u^*_{,i} d\Omega \right]. \quad (28)$$

A única propriedade requerida para a função  $\rho_{pi}^j$  é:

$$\rho_{pi}^j_{,i} = 0. \quad (29)$$

Logo, utilizando tal exigência e o Teorema da Divergência, o segundo termo do lado direito da equação (28) anula-se e a nova integral se escreve como:

$$\alpha_p^j \int_{\Omega} \rho_{pi}^j u^*_{,i} d\Omega = \alpha_p^j \int_{\Gamma} \rho_{pi}^j n_i u^* d\Gamma. \quad (30)$$

Após a discretização do contorno, e, procedendo de forma análoga à apresentada nas equações (17) a (21) chega-se à seguinte equação matricial:

$$HU - GQ = -BU + (H\Psi + G\Lambda)\alpha, \quad (31)$$

onde  $\Lambda$  é a matriz relacionada à nova função  $\rho_{pi}^j$  da seguinte forma:

$$\lambda_{pi}^j = \rho_{pi}^j n_i. \quad (32)$$

Uma das possíveis escolhas para a função ( $\rho$ ) é:

$$\rho_{pi}^j = \Delta(3RR_i R_p - 4R^3 \delta_{pi}), \quad (33)$$

onde  $\Delta$  é uma constante.

Tal função foi utilizada por Massaro na tentativa de resolver um problema de escoamento bidimensional em um tubo, bem como comparar os resultados da Quase-Dupla Reciprocidade com os resultados da Dupla-Reciprocidade tradicional.

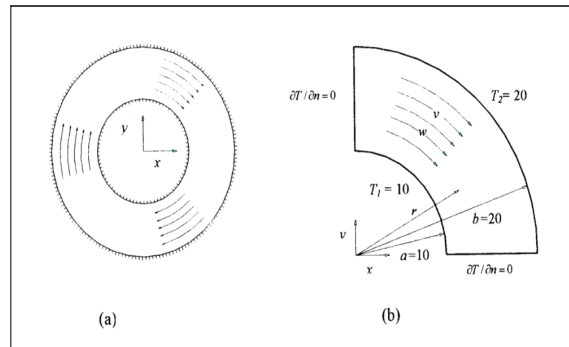


Figura 1: Escoamento Bidimensional em um Tubo Cilíndrico Circular

O problema abordado, devido às suas características, possui um fluxo difusivo dominante. A constante  $\Delta$ , quando amplificada, aumenta a característica difusiva da aproximação, o que resulta em melhores resultados conforme vê-se na figura abaixo:

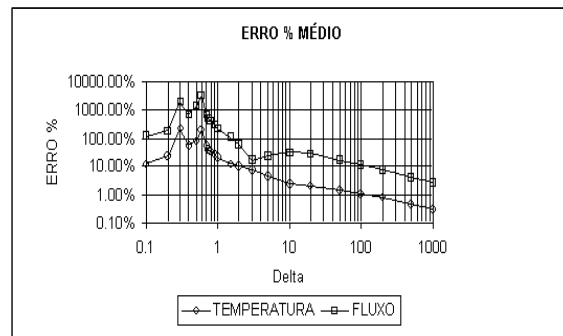


Figura 2: Erro percentual em função da constante  $\Delta$

## 4 Nova Estratégia de Completividade

No fundo a escolha da função  $\rho$  da equação (33) com a aproximação citada na equação (27), faz com que a aproximação seja formada por funções linearmente dependentes, o que acarreta perda de representatividade da solução numérica.

Assim, ao invés da função ( $\rho$ ) descrita na equação (33), a interpolação sugerida é:

$$b_i = v_i u \approx \alpha_p^j [\eta_{pi}^j + \delta_{pi}^j]. \quad (34)$$

onde  $\delta_{pi}^j$  é o delta de Kronecker.

Esta função apresenta a propriedade apresentada na equação (29), e, aumenta o caráter constante da aproximação (27). Tal aproximação faz com que apareça a seguinte integral, que será trabalhada nos moldes da equação (28), fornecendo:

$$\int_{\Omega} \delta_{pi}^j u^*_{,i} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta_{pi}^j u^* n_i d\Gamma. \quad (35)$$

A equação matricial, portanto fica:

$$HU - GQ = -BU + (H\Psi + G\Pi)\alpha, \quad (36)$$

onde  $\Pi$  é composta por:

$$\pi_p^j = n_p^j. \quad (37)$$

## 5 Conclusões Preliminares

A pesquisa está em andamento e, desse modo, os resultados obtidos até o momento são bastante incipientes. A estratégia proposta resolveu satisfatoriamente problemas unidimensionais, com precisão similar à obtida com Quase-Dupla Reciprocidade. No entanto, em uma dimensão a Quase-Dupla não apresenta problemas de completitude, em nenhum caso resolvido. Os casos bidimensionais são mais difíceis e propensos a problemas de completitude de forma que a interpolação ainda não foi testada adequadamente.

Os gráficos expostos nas figuras 4 e 5 mostram os resultados para o erro médio percentual considerando todos os pontos nodais nos quais são calculados os valores de temperatura e fluxo difusivo para o problema unidimensional. Na figura 4 são mostrados os valores numéricos para a formulação Quase-Dual com a função de interpolação original e na figura 5 os resultados para a função de interpolação acrescida da nova parcela proposta para melhorar a completitude. Percebe-se que para o problema em questão os resultados são bem equivalentes. Os valores de temperatura obtidos com o esquema proposto são até melhores que os conseguidos com a interpolação tradicional. No entanto, a convergência dos resultados do fluxo com o aumento do número de elementos de contorno com o esquema proposto ainda não está com a consistência esperada, pois não apresenta uma tendência monotônica de redução dos erros numéricos.

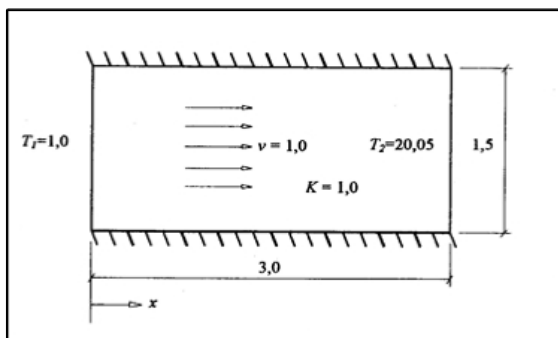


Figura 3: Escoamento Unidimensional

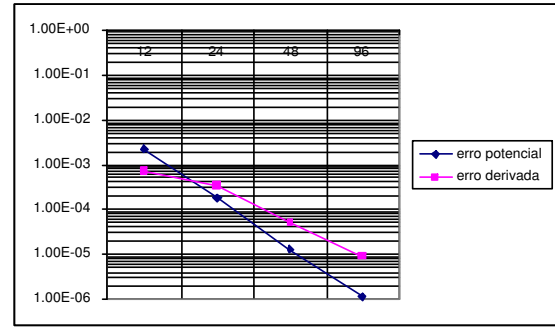


Figura 4: Erro Percentual Médio com o Esquema Usual

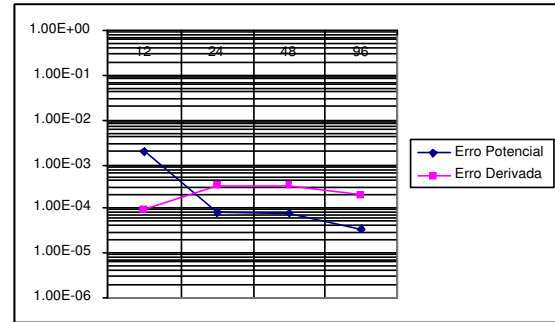


Figura 5: Erro Percentual Médio com o Esquema Proposto

## Referências

- [1] P.W. Partridge, C.A. Brebbia and L.C. Wrobel "The Dual Reciprocity Boundary Element Method", Computational Mechanics Publications, London, 1992.
- [2] C.F. Loeffler, W.J. Mansur, Quasi-Dual Reciprocity Boundary Element Formulation for Incompressible Flow: Application to the Diffusive-Advective Equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* vol 58, Issue 8, pag 1167-1186, John Wiley and Sons, New York, 2003.
- [3] C.A.M. Massaro, "O Método dos Elementos de Contorno Aplicado na Solução de Problemas de Transferência de Calor Difusivos-Advectivos", Dissertação de Mestrado, PPGEM, UFES, 2001.
- [4] I.V. Shames, "Mecânica dos Fluidos, vol 1- Princípios Básicos", Edgard Blücher, São Paulo, 1993.