

Expansão do Teorema de Moivre para Quatérnios e Séries de Potências

Ana C. Oliveira,* M.F.Borges, J.M.Machado

Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP

E-mail: anacaral@ibilce.unesp.br, Borges@ibilce.unesp.br, Jmarcio@ibilce.unesp.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é estabelecer similaridades entre os complexos e os hipercomplexos, motivados em explorar idéias de Murnaghan, que introduziu, pela primeira vez, em uma apresentação elementar, a teoria dos quatérnios baseados no teorema de Moivre.

Nós mostramos uma analogia da relação complexa clássica de Moivre para quatérnios generalizados.

Nos propomos a estudar a extensão do teorema de Moivre para quatérnios, em definindo uma função exponencial quaterniônica.

Séries de Potências de Números Quaterniônicos

Na representação vetorial, o produto de dois números quaterniônicos P e Q, dados por:

$$P = p_1 + p_2i + p_3j + p_4k$$

$$Q = q_1 + q_2i + q_3j + q_4k$$

p_1 e q_1 parte escalar e \vec{p} e \vec{q} parte vetorial

É escrito como:

$$PQ = p_1q_1 + p_1\vec{q} + q_1\vec{p} - \vec{p}\vec{q} + \vec{p} \times \vec{q}$$

$\vec{p}\vec{q}$ e $\vec{p} \times \vec{q}$ seriam respectivamente o produto interno usual e o produto vetorial no espaço Euclidiano de três dimensões.

De acordo com esta métrica, nós podemos dar forma à seqüência de potências z, z^2, z^3, \dots para um dado número quaterniônico, $z = u_1 + u_2i + u_3j + u_4k = u_1 + \vec{u}$ de tal maneira que:

$$z^0 = 1,$$

$$z^1 = u_1 + \vec{u},$$

$$\frac{z^2}{2!} = \frac{u_1^2}{2!} - \frac{\vec{u}\vec{u}}{2!} + \frac{2 \cdot u_1 \cdot \vec{u}}{2!}$$

$$\frac{z^3}{3!} = \frac{u_1^3}{3!} - \frac{3 \cdot u_1 \cdot \vec{u}\vec{u}}{3!} + \left(\frac{3u_1^2}{3!} - \frac{\vec{u}\vec{u}}{3!}\right)\vec{u}$$

$$\frac{z^4}{4!} = \frac{u_1^4}{4!} - \left(\frac{4! \cdot u_1^2 \cdot \vec{u}\vec{u}}{2!2!4!}\right)\vec{u} + \frac{(\vec{u}\vec{u})^2}{4!} + \left(\frac{4 \cdot u_1^3}{4!} - \frac{4 \cdot u_1 \cdot \vec{u}\vec{u}}{4!}\right)\vec{u}$$

$$\frac{z^5}{5!} = \frac{u_1^5}{5!} + \frac{5 \cdot u_1(\vec{u}\vec{u})^2}{5!} - \frac{5! \cdot u_1^3 \cdot \vec{u}\vec{u}}{3!2!5!} + \left(\frac{5 \cdot u_1^4}{5!} - \frac{5! \cdot u_1^2 \cdot \vec{u}\vec{u}}{3!2!5!} + \frac{(\vec{u}\vec{u})^2}{5!}\right)\vec{u}$$

e

$$\frac{z^6}{6!} = \frac{u_1^6}{6!} + \frac{6! \cdot u_1^2(\vec{u}\vec{u})^2}{4!2!6!} - \frac{6! \cdot u_1^4(\vec{u}\vec{u})}{4!2!6!} - \frac{(\vec{u}\vec{u})^3}{6!} + \left(\frac{6 \cdot u_1^5}{6!} + \frac{6 \cdot u_1 \cdot (\vec{u}\vec{u})^2}{6!} - \frac{6! \cdot u_1^3(\vec{u}\vec{u})}{3!3!6!}\right)\vec{u}.$$

Algumas simplificações evidentes são o bastante para arranjar os termos em uma maneira mais familiar, desde que pela definição:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + \dots =$$

$$(1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^4}{4!} + \frac{u_1^5}{5!} + \dots)(1 - \frac{\vec{u}\vec{u}}{2!} + \frac{(\vec{u}\vec{u})^2}{4!} - \frac{(\vec{u}\vec{u})^3}{6!} + \dots) + \vec{u} \left\{ (1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^4}{4!} + \frac{u_1^5}{5!} + \dots) - \frac{\vec{u}\vec{u}}{3!} (1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \dots) \right\}$$

$$+ \vec{u} \left\{ \frac{(\vec{u}\vec{u})^2}{5!} (1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \dots) - \frac{(\vec{u}\vec{u})^3}{7!} (1 + u_1 + \dots) \right\}$$

E conseqüentemente:

$$e^z = (1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^4}{4!} + \frac{u_1^5}{5!} + \dots)(1 - \frac{\vec{u}\vec{u}}{2!} + \frac{(\vec{u}\vec{u})^2}{4!} - \frac{(\vec{u}\vec{u})^3}{6!} + \dots) + \vec{u} \left\{ (1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^4}{4!} + \dots) (1 - \frac{\vec{u}\vec{u}}{3!} + \frac{(\vec{u}\vec{u})^2}{5!} - \frac{(\vec{u}\vec{u})^3}{7!} + \dots) \right\}.$$

Equação (1)

Pelas correspondências

$$(1 - \frac{\vec{u}\vec{u}}{2!} + \frac{(\vec{u}\vec{u})^2}{4!} - \frac{(\vec{u}\vec{u})^3}{6!} + \dots) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{\vec{u}\vec{u}})^{2n}}{(2n)!},$$

$$(1 - \frac{\vec{u}\vec{u}}{3!} + \frac{(\vec{u}\vec{u})^2}{5!} - \frac{(\vec{u}\vec{u})^3}{7!} + \dots) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{\vec{u}\vec{u}})^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\vec{u}\vec{u}}},$$

*Mestranda em Matemática Aplicada

$$(1 + u_1 + \frac{u_1^2}{2!} + \frac{u_1^3}{3!} + \frac{u_1^4}{4!} + \frac{u_1^5}{5!} + \dots) = e^{u_1},$$

e de acordo com as definições precedentes, temos:

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}) &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}})^{2n}}{(2n!)}, \\ \frac{\sin(\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2})}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}} &= \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}})^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}}, \end{aligned}$$

O que conduz à expressão final para a equação (1)

$$e^z = e^{u_1} \left\{ \cos(\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}) + \vec{u} \left(\frac{\sin(\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2})}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}} \right) \right\},$$

$$\vec{u} = u_2 i + u_3 j + u_4 k, \quad z = u_1 + \vec{u}$$

Conclusão

Podemos citar brevemente algumas das contribuições de Moivre em relevantes campos, tais como:

(i) a introdução da probabilidade na matemática (a matematização da possibilidade dentro da área de jogos de possibilidade)

(ii) A solução de Moivre para o movimento aleatório de partículas entre duas paredes.

(iii) a fórmula do número de Tetraonacci

(iv) a teoria do ponto fixo (o índice de um campo V do vetor em um distribuidor compacto M é relacionado com o índice de um campo do vetor em uma parte do limite).

Dentro do contexto da teoria dos quatérnios, Murnaghan mostrou que o teorema de Moivre pode também ser considerado como um ingrediente básico, da própria fundação da álgebra dos quatérnios. Mostra-se recentemente que algumas propriedades da teoria bidimensional das variáveis complexas, tais como as relações de Cauchy-Riemann e de mapeamentos conformes, podem ser estendidos aos quatérnios. Neste trabalho, seguindo um desejo para estabelecer similaridades entre os complexos e a análise de hipercomplexos, e motivados em explorar idéias de Murnaghan, nós mostramos uma analogia da relação complexa clássica de Moivre para quatérnios gerais. Outras conexões e propriedades possíveis das contribuições de Moivre, no contexto do hipercomplexo, estão sendo investigadas e podem ser relatadas em uma comunicação mais próxima.

Referências

[1] T.Y. Lam, Handbook of Álgebra, vol. 3, North-Holland, Amsterdam, (2003), 429-454.

[2] S.Eilenberg, I.Niven, The Fundamental Theorem of Algebra for quaternions, Bull. Amer. Math. Society, 50: (1944), 246-248.

[3] H.S.M.Coxeter, The binary polyhedral groups, and other generalizations of quaternion group, Duke Math.J.,7: (1940), 367-379.

[4] F.D.Murnaghan, An elementary presentation of the theory of quaternions, Scripta Math., 10: (1944), 37-49.

[5] J.M. Machado, M. F. Borges, New remarks on the differentiability of hypercomplex functions, International Journal of Applied Mathematics, 8: (1) (2002), 85-101.

[6] J.M. Machado, M.F. Borges, Hypercomplex Functions and Conformal Mappings, International Journal of Applied Mathematics, 9: (1) (2002), 27-38.

[7] J.M.Machado, M.F. Borges, Quaternion Functions and four dimensional Riemannian metrics, Communications in Applied Analysis, 9: (1) (2005).

[8] M.F. Borges, A.Godoy, J.M.Machado, Quaternionic factors and Robertson-Walker metrics, International Journal of Applied Mathematics, 12: (3) (2003), 279-288.

[9] J.M. Machado, M.F. Borges, Complexified Fueter operators in classical and quantum electrodynamics, Communications in Applied Analysis (to appear).

[10] E. Cho, De Moivre Formula for Quaternions, Appl. Math. Lett., 11: (6) (1998), 33-35.

[11] F. Silva Leite, J. Vitória; Generalization of the De Moivre formula for quaternions and octonions; Math. Studies in honor of Prof. Luis Albuquerque (in Portuguese), Univ. de Coimbra, Coimbra, Portugal, (1994), 121-133.