

Relações de Recorrência com Coeficientes Perturbados*

Andrea P. da Silva,

Ciências de Computação e Matemática Computacional, ICMC, USP,
13560-970, São Carlos, SP
E-mail: andreaps@icmc.usp.br,

A. Sri Ranga

Depto de Ciências de Computação e Estatística, IBILCE, UNESP,
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: ranga@ibilce.unesp.br.

1 Polinômios gerados por uma relação de recorrência de três termos

Seja Q_m os polinômios gerados pela relação de recorrência de três termos

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta_{m+1})Q_m(z) - \alpha_{m+1}zQ_{m-1}(z), \quad (1)$$

para $m \geq 1$, com $Q_0 = 1$ e $Q_1(z) = z + \beta_1$, onde os números complexos α_m e β_m são tais que

$$\alpha_{m+1} \neq 0 \quad \text{e} \quad \beta_m \neq 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Essa relação de recorrência foi estudada por muitos autores quando

$$\alpha_{m+1} > 0 \quad \text{e} \quad \beta_m < 0 \quad \text{para} \quad m \geq 1.$$

Citamos o artigo de Jones, Thron e Waadeland [1], como a motivação inicial para o estudo deste caso especial de relação de recorrência. Para uma referência mais recente, citamos o trabalho de Sri Ranga e Van Assche [3].

De (1), temos imediatamente que $Q_m(0) = \beta_1\beta_2 \cdots \beta_m \neq 0$, $m \geq 1$. Além disso, como (1) pode ser escrito na forma

$$\begin{aligned} \alpha_2 z &= (z + \beta_2)Q_1(z) - Q_2(z), \\ \alpha_{m+1} z &= (z + \beta_{m+1})\frac{Q_m(z)}{Q_{m-1}(z)} - \frac{Q_{m+1}(z)}{Q_{m-1}(z)}, \end{aligned}$$

temos que os polinômios consecutivos Q_m e Q_{m+1} não têm zeros em comum.

Os zeros de Q_n são os autovalores da matriz de Hessenberg inferior

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\eta_m = \alpha_m - \beta_m, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad \alpha_1 = 0.$$

* Apoio financeiro FAPESP

Baseados no recente trabalho de Sri Ranga e Van Assche [3], fazemos uma análise similar àquela desenvolvida pelos autores, mas com as hipóteses feitas em (2), e mais a hipótese de que os autovalores $z_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, de \mathbf{H}_n (isto é, os zeros de Q_n) são distintos.

Sejam

$$\begin{aligned} \hat{Q}_m(z) &= (\alpha_2\alpha_3 \cdots \alpha_{m+1})^{-1}Q_m(z) \\ \text{e} \\ \tilde{Q}_m(z) &= z^{-m}Q_m(z), \end{aligned}$$

para $1 \leq m \leq n$, e $\hat{Q}_0(z) = \tilde{Q}_0(z) = Q_0(z)$. Então, a relação de recorrência (1) para $m = 1, 2, \dots, n-1$ pode ser dada de duas formas diferentes

$$z[-\hat{Q}_{m-1}(z) + \hat{Q}_m(z)] = -\beta_{m+1}\hat{Q}_m(z) + \alpha_{m+2}\hat{Q}_{m+1}(z),$$

e

$$z[\tilde{Q}_m(z) - \tilde{Q}_{m+1}(z)] = \alpha_{m+1}\tilde{Q}_{m-1}(z) - \beta_{m+1}\tilde{Q}_m(z),$$

com $z[\hat{Q}_0(z)] = -\beta_1\hat{Q}_0(z) + \alpha_2\hat{Q}_1(z)$ e $z[\tilde{Q}_0(z) - \tilde{Q}_1(z)] = -\beta_1\tilde{Q}_0(z)$. Na forma matricial, essas relações podem ser escritas como

$$z\mathbf{A}_n\hat{\mathbf{b}}(z) = \mathbf{B}_n\hat{\mathbf{b}}(z) + \alpha_{n+1}\hat{Q}_n(z)\mathbf{e}_n \quad (4)$$

e

$$z\tilde{\mathbf{b}}(z)^T\mathbf{A}_n = \tilde{\mathbf{b}}(z)^T\mathbf{B}_n + z\tilde{Q}_n(z)\mathbf{e}_n^T, \quad (5)$$

onde \mathbf{A}_n e \mathbf{B}_n são, respectivamente, as matrizes $n \times n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -\beta_1 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta_n \end{bmatrix},$$

\mathbf{e}_n é a n -ésima coluna da matriz identidade $n \times n$,

$$\hat{\mathbf{b}}(z) = [\hat{Q}_0(z), \hat{Q}_1(z), \dots, \hat{Q}_{n-1}(z)]^T \quad \text{e}$$

$$\tilde{\mathbf{b}}(z) = [\tilde{Q}_0(z), \tilde{Q}_1(z), \dots, \tilde{Q}_{n-1}(z)]^T.$$

Conseqüentemente, de (4), $\hat{\mathbf{b}}(z_{n,j})$ é um autovetor à direita de $\mathbf{H}_n = \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{B}_n$ associado ao autovalor $z_{n,j}$. Além disso, como supomos que $z_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, são distintos, os correspondentes autovetores à direita $\hat{\mathbf{b}}(z_{n,j})$, $j = 1, 2, \dots, n$, são todos linearmente independentes.

Analogamente, de (5), $\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})$ é um autovetor à esquerda de \mathbf{H}_n associado ao autovalor $z_{n,j}$. Embora não seja aqui relevante, talvez seja mais apropriado dizer que $\tilde{\mathbf{c}}(z_{n,j})$, onde $\tilde{\mathbf{c}}(z) = \mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z)$, é um autovetor à esquerda de \mathbf{H}_n , pois neste caso, temos $\tilde{\mathbf{c}}(z_{n,j})^* \mathbf{H}_n = \tilde{\mathbf{c}}(z_{n,j})^* z_{n,j}$. Aqui, $*$ representa o transposto conjugado. Novamente, existem n autovetores à esquerda linearmente independentes $\tilde{\mathbf{c}}(z_{n,j})$, $j = 1, 2, \dots, n$, associados aos n autovalores distintos $z_{n,j}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

A multiplicação de (4), avaliado em w , à direita por $\tilde{\mathbf{b}}(z)^T$ e a multiplicação de (5) à esquerda por $\hat{\mathbf{b}}(w)$ nos fornecem os seguintes sistemas

$$w\mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T = \mathbf{B}_n \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T + \alpha_{n+1} \hat{Q}_n(w) \mathbf{e}_n \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \quad (6)$$

e

$$z \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n = \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{B}_n + z \tilde{Q}_n(z) \hat{\mathbf{b}}(w) \mathbf{e}_n^T. \quad (7)$$

Como $\text{tr } \mathbf{A}\mathbf{B} = \text{tr } \mathbf{B}\mathbf{A}$, subtraindo o traço de (7) do traço de (6), temos

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-2} \{ \tilde{Q}_m(z) - \tilde{Q}_{m+1}(z) \} \hat{Q}_m(w) + \tilde{Q}_{n-1}(z) \hat{Q}_{n-1}(w) \\ = \frac{z \tilde{Q}_n(z) \hat{Q}_{n-1}(w) - \alpha_{n+1} \hat{Q}_n(w) \tilde{Q}_{n-1}(z)}{z - w}. \end{aligned} \quad (8)$$

Esta relação é uma espécie da fórmula de Cristoffel-Darboux. O termo do lado esquerdo desta fórmula pode ser identificado como $\tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(w) = \tilde{\mathbf{c}}(z)^* \hat{\mathbf{b}}(w)$ e isto confirma a ortogonalidade do autovetor à esquerda $\tilde{\mathbf{c}}(z_{n,j})$ e do autovetor à direita $\hat{\mathbf{b}}(z_{n,k})$ quando $j \neq k$. Em (8), fazendo $w \rightarrow z$,

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-2} \{ \tilde{Q}_m(z) - \tilde{Q}_{m+1}(z) \} \hat{Q}_m(z) + \tilde{Q}_{n-1}(z) \hat{Q}_{n-1}(z) \\ = \alpha_{n+1} \hat{Q}'_n(z) \tilde{Q}_{n-1}(z) - z \tilde{Q}_n(z) \hat{Q}'_{n-1}(z). \end{aligned}$$

Assim, para $1 \leq j \leq n$ e $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T \hat{\mathbf{b}}(z_{n,k}) &= \hat{\mathbf{b}}(z_{n,k})^T [\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})] \\ &= \lambda_{n,j}^{-1} \delta_{j,k}, \end{aligned}$$

onde $\lambda_{n,j}^{-1} = \alpha_{n+1} \hat{Q}'_n(z_{n,j}) \tilde{Q}_{n-1}(z_{n,j})$ e $\delta_{j,k}$ é o delta de Kronecker. Como os zeros de Q_n são simples (distintos) e, Q_n e Q_{n-1} não têm zeros em comum, então $\lambda_{n,j} \neq 0$, para $j = 1, 2, \dots, n$. Assim, podemos dizer que as duas seqüências finitas $\{\hat{\mathbf{b}}(z_{n,j})\}_{j=1}^n$ e $\{\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})\}_{j=1}^n$ são biortogonais.

Se definirmos \mathbf{P}_n , matriz não-singular $n \times n$, por

$$\mathbf{P}_n = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{b}}(z_{n,1}) & \hat{\mathbf{b}}(z_{n,2}) & \dots & \hat{\mathbf{b}}(z_{n,n}) \\ \alpha_{n+1} \hat{Q}'_n(z_{n,1}) & \alpha_{n+1} \hat{Q}'_n(z_{n,2}) & \dots & \alpha_{n+1} \hat{Q}'_n(z_{n,n}) \end{bmatrix},$$

então sua inversa (a matriz que satisfaz $\mathbf{P}_n^{-1} \mathbf{P}_n = \mathbf{I}_n$) é

$$\mathbf{P}_n^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,1}) & \mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,2}) & \dots & \mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,n}) \\ \tilde{Q}_{n-1}(z_{n,1}) & \tilde{Q}_{n-1}(z_{n,2}) & \dots & \tilde{Q}_{n-1}(z_{n,n}) \end{bmatrix}^T.$$

Se $\hat{p}_{k,j}$ e $\tilde{p}_{k,j}$ são os elementos da k -ésima linha e j -ésima coluna das matrizes \mathbf{P}_n e \mathbf{P}_n^{-1} , respectivamente, então

$$\hat{p}_{k,j} = \frac{\hat{Q}_{k-1}(z_{n,j})}{\alpha_{n+1} \hat{Q}'_n(z_{n,j})} \quad \text{e} \quad \tilde{p}_{k,j} = \frac{\tilde{Q}_{j-1}(z_{n,k}) - \tilde{Q}_j(z_{n,k})}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,k})}.$$

Com as matrizes \mathbf{P}_n e \mathbf{P}_n^{-1} , podemos escrever o problema do autovalor associado a \mathbf{H}_n como

$$\mathbf{P}_n^{-1} \mathbf{H}_n \mathbf{P}_n = \mathbf{\Xi}_n, \quad (9)$$

onde $\mathbf{\Xi}_n$ é a matriz diagonal contendo os autovalores $z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n}$.

Exemplo: Consideremos o seguinte caso especial de relação de recorrência de três termos para o qual as matrizes $\mathbf{\Xi}_n$, \mathbf{P}_n e \mathbf{P}_n^{-1} podem ser explicitamente encontradas. Com $\beta > 0$, sejam os polinômios $\{Q_m(\beta; z)\}_{m=0}^n$ dados por

$$Q_{m+1}(\beta; z) = (z + \beta)Q_m(\beta; z) - \beta z Q_{m-1}(\beta; z),$$

para $m = 1, 2, \dots, n-1$, com $Q_0(\beta; z) = 1$, $Q_1(\beta; z) = z + \beta$. Denotemos a matriz de Hessemberg associada a esta relação de recorrência (dada de acordo com a matriz (3)) por $\mathbf{H}_n^{(\beta)}$.

Temos que $Q_k(\beta; z) = (z^{k+1} - \beta^{k+1})/(z - \beta)$, para $k = 0, 1, \dots, n$. Os zeros de $Q_n(\beta; z)$ (isto é, os autovalores de $\mathbf{H}_n^{(\beta)}$) são $z_{n,j} = z_{n,j}^{(\beta)} = \beta e^{i \frac{2j\pi}{n+1}}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Conseqüentemente,

$$\hat{Q}_k(\beta; z_{n,j}) = \beta^{-k} Q_k(\beta; z_{n,j}) = \frac{\text{sen}\left(\frac{(k+1)j\pi}{n+1}\right)}{\text{sen}\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)} e^{i \frac{kj\pi}{n+1}},$$

$$\tilde{Q}_k(\beta; z_{n,j}) = z_{n,j}^{-k} Q_k(\beta; z_{n,j}) = \frac{\text{sen}\left(\frac{(k+1)j\pi}{n+1}\right)}{\text{sen}\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)} e^{-i \frac{kj\pi}{n+1}}.$$

Assim, os elementos $\hat{p}_{k,j}^{(\beta)}$ e $\tilde{p}_{k,j}^{(\beta)}$ da k -ésima linha e j -ésima coluna das correspondentes matrizes $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n^{(\beta)}$ e $(\mathbf{P}_n)^{-1} = (\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}$ são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \hat{p}_{k,j}^{(\beta)} &= \frac{2i}{n+1} \text{sen}\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right) e^{-i \frac{(2n-k)j\pi}{n+1}} \quad \text{e} \\ \tilde{p}_{k,j}^{(\beta)} &= e^{-i \frac{2(j+1)k\pi}{n+1}}. \end{aligned}$$

Portanto, podemos estabelecer o seguinte resultado,

$$\|(\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}\|_1 = \|(\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}\|_\infty = n,$$

$$\|\mathbf{P}_n^{(\beta)}\|_1 = \|\mathbf{P}_n^{(\beta)}\|_\infty = \frac{2}{n+1} \sigma_n,$$

onde

$$\sigma_n = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \left| \text{sen}\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right) \right| \right\} \leq \sqrt{n(n+1)/2}. \quad (10)$$

2 Perturbações - Aplicações

Analizamos agora, os zeros de polinômios através da representação de autovalores (9) associada com a correspondente matriz de Hessenberg. O objetivo principal é encontrar limitantes para as regiões onde os zeros estão localizados, em função dos coeficientes perturbados da relação de recorrência.

Aplicação 2.1: Dada a relação de recorrência de três termos (1) suponha que todos os zeros $z_{n,j}$ de Q_n (autovalores de \mathbf{H}_n) são distintos e que as matrizes \mathbf{P}_n , \mathbf{P}_n^{-1} e $\mathbf{\Xi}_n$ são dadas como em (9). Considere a relação de recorrência de três termos perturbada

$$Q_{m+1}^\epsilon(z) = (z + \beta_{m+1}^\epsilon)Q_m^\epsilon(z) - \alpha_{m+1}^\epsilon z Q_{m-1}^\epsilon(z),$$

com $Q_0^\epsilon = 1$ e $Q_1^\epsilon(z) = z + \beta_1^\epsilon$, onde os números complexos α_m^ϵ e β_m^ϵ são tais que $|\alpha_m^\epsilon - \alpha_m| \leq \epsilon$, $m = 2, 3, \dots, n$ e $|\beta_m^\epsilon - \beta_m| \leq \epsilon$, $m = 1, 2, 3, \dots, n$. Aqui, ϵ é um número positivo.

Seja \mathbf{H}_n^ϵ a matriz de Hessenberg associada à relação de recorrência acima, definida de acordo com (3), cujos autovalores são os zeros do polinômio Q_n^ϵ . Então, para qualquer zero w de Q_n^ϵ ,

$$\min_{1 \leq j \leq n} |w - z_{n,j}| \leq \|\mathbf{H}_n^\epsilon - \mathbf{H}_n\| \|\mathbf{P}_n\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\|,$$

onde $\|\cdot\|$ é qualquer norma subordinada em \mathbb{C}^n .

É fácil verificar que

$$\|\mathbf{H}_n^\epsilon - \mathbf{H}_n\|_\infty \leq (2n-1)\epsilon \quad \text{e} \quad \|\mathbf{H}_n^\epsilon - \mathbf{H}_n\|_1 \leq (2n-1)\epsilon.$$

Aplicação 2.2: Seja $\beta > 0$ e considere a relação de recorrência de três termos

$$Q_{m+1}^\epsilon(z) = (z + \beta_{m+1}^\epsilon)Q_m^\epsilon(z) - \alpha_{m+1}^\epsilon z Q_{m-1}^\epsilon(z),$$

com $Q_0^\epsilon = 1$ e $Q_1^\epsilon(z) = z + \beta_1^\epsilon$, onde os números complexos α_m^ϵ e β_m^ϵ são tais que $|\alpha_m^\epsilon - \beta| \leq \epsilon$ para $m = 2, 3, \dots, n$ e $|\beta_m^\epsilon - \beta| \leq \epsilon$ para $m = 1, 2, 3, \dots, n$. Aqui ϵ é um número positivo.

Seja \mathbf{H}_n^ϵ (definida de acordo com (3)), a matriz de Hessenberg associada à relação de recorrência acima, cujos autovalores são os zeros do polinômio Q_n^ϵ . Então, os zeros de Q_n^ϵ estão no anel

$$\zeta\left(\beta - \frac{2n\sigma_n}{n+1}\|\mathbf{H}_n^\epsilon - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\|\right) \leq |z| \leq \beta + \frac{2n\sigma_n}{n+1}\|\mathbf{H}_n^\epsilon - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\|,$$

onde a função real $\zeta(x)$ é igual a x , se $x > 0$, e igual a 0, caso contrário. O número σ_n é dado por (10).

3 Polinômios com coeficientes não nulos

Seja $P_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k = b_n \sum_{k=0}^n \tilde{b}_k z^k = b_n \tilde{P}_n(z)$,

onde b_k , $k = 0, 1, \dots, n$, são complexos, diferentes de zero e $\tilde{b}_k = \frac{b_k}{b_n}$ para $k = 0, 1, \dots, n$. Seja

$$t_k = \frac{b_{k-1}}{b_k} = \frac{\tilde{b}_{k-1}}{\tilde{b}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Temos a seguinte expressão em termos de frações contínuas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{P}_n(z)} & \left[z^{n-1} + \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} z^{n-2} + \dots + \frac{b_1}{b_{n-1}} z + \frac{b_0}{b_{n-1}} \right] \\ & = \frac{1}{z + t_n} - \frac{t_{n-1}z}{z + t_{n-1}} - \frac{t_{n-2}z}{z + t_{n-2}} - \dots - \frac{t_1 z}{z + t_1}. \end{aligned}$$

Da fração contínua acima, se considerarmos a seqüência de polinômios $\{Q_k\}_{k=0}^n$ gerada por $Q_0 = 1$, $Q_1(z) = z + t_n$ e para $1 \leq k \leq n-1$,

$$Q_{k+1}(z) = (z + t_{n-k})Q_k(z) - t_{n-k}zQ_{k-1}(z),$$

então, Q_k é o denominador do k -ésimo convergente desta fração contínua e, em particular $Q_n = \tilde{P}_n$. Portanto, da matriz (3) para a relação de recorrência de três termos acima, obtemos que os zeros de P_n são os autovalores da matriz de Hessenberg inferior

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} -t_n & t_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -t_n & 0 & t_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -t_n & 0 & 0 & \dots & t_2 & 0 \\ -t_n & 0 & 0 & \dots & 0 & t_1 \\ -t_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora, a próxima aplicação fornece algumas informações sobre a variação dos zeros quando os coeficientes de um polinômio variam como em uma progressão geométrica.

Aplicação 3.1: Seja $|\beta| > 0$ e considere o polinômio $P_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$ tal que as razões $t_k = \frac{b_{k-1}}{b_k}$ são tais que

$$|t_k - \beta| \leq \epsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

com ϵ um número positivo. Então, todos os zeros de P_n estão no anel

$$\zeta\left(|\beta| - \frac{4n\sigma_n}{n+1}\epsilon\right) \leq |z| \leq |\beta| + \frac{4n\sigma_n}{n+1}\epsilon,$$

onde a função real $\zeta(x)$ é igual a x , se $x > 0$, e igual a 0, caso contrário. O número σ_n é dado por (10).

Referências

- [1] W.B. Jones, W.J. Thron, H. Waadeland, A strong Stieltjes moment problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **261** (1980), 503-528.
- [2] A.P. da Silva, A. Sri Ranga, Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros, *Linear Algebra Appl.*, **397** (2005), 299-324.
- [3] A. Sri Ranga, W. Van Assche, Blumenthal's theorem for Laurent orthogonal polynomials, *J. Approx. Theory*, **117** (2002), 255-278.