

Detectando a presença de caos em uma série temporal

Andriana S L O Campanharo*, Elbert E N Macau, Fernando M Ramos

Laboratório Associado de Computação e Matemática Aplicada, LAC, INPE,
12227-010, São José dos Campos, SP

E-mail: andriana@lac.inpe.br, elbert@lac.inpe.br, fernando@lac.inpe.br

1 Introdução

Até recentemente, os sistemas dinâmicos eram classificados em três categorias, segundo o padrão de variação no tempo das grandezas que caracterizam os seus estados:

- estáveis, convergindo para um valor fixo;
- periódicos, estabelecendo-se em oscilações periódicas; ou
- imprevisíveis, caracterizado por flutuações irregulares.

Sistemas imprevisíveis eram também denominados *aleatórios* ou *ruidosos*. Porém, em 1963, Edward Lorenz [8] fez uma descoberta que surpreendeu o mundo, enquanto estudava um modelo de previsão do tempo. Seu modelo seguiu um curso que não se enquadrava como aleatório, periódico ou convergente, exibindo um comportamento bastante complexo, embora fosse definido apenas por poucas e simples equações diferenciais. A dinâmica gerada pelo modelo exibia uma característica não usual: dois pontos localizados a uma distância ínfima seguiam rotas temporais bastante divergentes. Esta observação levou Lorenz a concluir que a previsão do tempo em um intervalo de tempo longo não seria possível. Sistemas como o de Lorenz são denominados “caóticos determinísticos” ou simplesmente “caóticos”; ou seja, embora apresentem um comportamento aperiódico e imprevisível, a sua dinâmica é governada por equações diferenciais determinísticas simples.

A divergência de rotas bastante próximas observada por Lorenz é uma das características principais de sistemas complexos que exibem resposta caótica. Esse efeito é denominado *sensibilidade às condições iniciais*. Uma analogia a este efeito é o chamado *efeito borboleta*, que diz que pequenas flutuações no ar, causadas pelo bater das asas de uma borboleta, podem gerar conseqüências inimagináveis.

A sensibilidade crítica às condições iniciais é a característica fundamental que diferencia os sistemas complexos caóticos determinísticos dos sistemas que apresentam respostas aleatórias ou es-

tocásticas. Para estes sistemas (aleatórios ou estocásticos), a mesma condição inicial pode conduzi-los a estados bastantes distintos em pequenos intervalos de tempo, o que não ocorre nos sistemas caóticos determinísticos.

Atualmente, o caos é utilizado como uma ferramenta de observação de fenômenos previamente mal compreendidos do ponto de vista determinístico, tais como fenômenos epidemiológicos, turbulência de fluidos, fluxo de calor, ritmos biológicos e movimentos populacionais, sociais e econômicos.

Quando se mede um sinal temporal discreto, sempre se deseja encontrar as equações que governam a dinâmica deste sistema. Se este sinal for caótico, deseja-se determinar se o sistema é caótico determinístico ou aleatório. No caso de um sistema caótico determinístico, espera-se poder descrever a sua dinâmica por meio de um conjunto finito de equações diferenciais. Sendo o sistema aleatório, este não seria descrito por um conjunto de equações diferenciais ordinárias ou parciais (devido a seu elevado grau de liberdade), mas sim por funções de probabilidade.

2 Evidências experimentais de caos

Estados caóticos ocorrem freqüentemente em fenômenos naturais, porém modelos matemáticos com formas fechadas são raramente avaliados. Esta situação leva diversas indagações com relação ao uso de dados experimentais. Primeiro, como saber se um conjunto de dados aparentemente ruidoso de fato vem de um sistema caótico? Segundo, como dados caóticos podem ser usados para fazer previsões ou previsões? Finalmente, como dados experimentais são usados para influenciar e controlar sistemas dinâmicos?

2.1 Caracterização de estados caóticos

Nesta subseção, será considerado o uso de dados experimentais para “*testar*” a existência de caos; a

* bolsista de Mestrado CAPES

reconstrução do atrator caótico se ele existir; e a *caracterização* de suas estruturas quantitativamente.

A informação completa de todos os graus de liberdade de um sistema dinâmico complexo é raramente conhecida em sua totalidade. Por exemplo, em um fluido caótico, esta informação deveria incluir a velocidade do fluido em diversas posições como função do tempo, o que é inviável na prática. Porém, é freqüentemente possível conhecer uma quantidade de uma *série temporal*, ou seja, uma lista de sucessivos valores de uma quantidade dinâmica. No estudo proposto, a série temporal a ser utilizada será aquela quem contém parte da solução numérica das equações de Lorenz, ou seja, apenas a evolução em tempo discreto de uma das variáveis de estado, ou seja, x , y ou z . Conseqüentemente será focada a atenção sobre métodos para analisar tal série temporal, em particular, que não dependa de um modelo particular, mas que possa ser usado para detectar a dinâmica caótica e caracterizá-la quantitativamente.

Métodos para análise dinâmica de séries temporais estão ainda em desenvolvimento, porém um método comum é um processo dividido em duas partes:

1. reconstrução do atrator estranho de um sistema dinâmico desconhecido por meio de uma série temporal;
2. determinação de certas quantidades invariantes do sistema por meio do atrator reconstruído. Estes invariantes podem incluir um ou mais expoentes de Lyapunov e a dimensão do atrator.

2.2 Experimento e simulações

Considere o sistema dinâmico introduzido por Lorenz como um simples modelo de convecção. As equações a seguir, foram as primeiras a ilustrar o comportamento caótico em um modelo inspirado por dinâmica dos fluidos. Elas têm a forma

$$\begin{cases} dx/dt = -\rho(x + y) \\ dy/dt = -xz + rx - y \\ dz/dt = xy - bz \end{cases} \quad (1)$$

onde ρ , r , e b são parâmetros que caracterizam as propriedades do fluido e da configuração térmica e geométrica do experimento. A variável x está relacionada a uma função que caracteriza o fluxo do fluido, y é proporcional à diferença de temperatura entre as partes superior e inferior do rolo de convecção, e z descreve a não-linearidade na diferença de temperatura ao longo do rolo. Soluções numéricas destas equações com valores de parâmetros iguais a $\rho = 10$, $r = 28$, e $b = 8/3$ levam a um atrator imergido em um espaço tridimensional com coordenadas (x, y, z) , como mostra a Figura 1. Sabendo-se que um espaço de fases é um sistema de coordenadas associado às variáveis

independentes que descrevem a dinâmica deste sistema, então, para o exemplo acima, o espaço de fases é definido pelas coordenadas x , y e z das equações de Lorenz. O atrator presente na Figura 1 é a representação da dinâmica do sistema nesse espaço de fases. Sistemas que apresentam comportamento estável, periódico ou caótico possuem atratores característicos. Um sistema estável é representado por um ponto fixo no espaço de fases; enquanto um sistema periódico apresenta uma órbita fechada (ciclo-limite). No caso de sistemas caóticos, e em particular das equações de Lorenz, as órbitas do atrator nunca nunca repetem o mesmo caminho; contudo, elas estão confinadas (atraídas) a uma região limitada do espaço de fases. Atratores de sistemas caóticos são denominados *atratores estranhos*, terminologia introduzida por Ruelle e Takens [9]. As trajetórias alternam sobre um dos dois pontos fixos instáveis (onde as derivadas são nulas) e eventualmente escapam para a órbita do outro ponto fixo. Este processo é repetido indefinidamente. Atratores estranhos encontrados em sistemas dinâmicos caóticos apresentam auto-similaridade de escala (ou caráter fractal), e uma dimensão fractal associada.

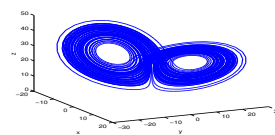


Figura 1: Atrator caótico para o sistema de Lorenz

Através da Equação (1) todas as variáveis são acessíveis. Contudo, não será utilizado o conjunto de informações do sistema em sua totalidade e sim apenas uma série temporal singular obtida a partir da solução numérica da Equação (1), em particular, o valor da variável x ao longo do tempo. A Figura 2 exibe a série temporal associada a cada uma dessas variáveis em função do tempo.

A série temporal experimental obtida é afetada por todas as variáveis dinâmicas relevantes, e dessa forma, ela contém gravada em si mesma informações

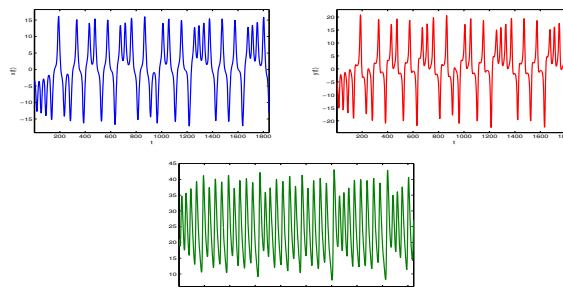


Figura 2: Série espermental para cada uma das variáveis x , y e z em função do tempo t

da dinâmica do sistema.

2.3 Reconstrução do atrator

Em diversos sistemas experimentais, é impossível registrar todo o conjunto de variáveis independentes simultaneamente, a fim de se construir o atrator. Porém, de acordo com o teorema de Takens [11], a trajetória completa de um sistema em um espaço de fases pode ser reconstruída a partir da medida de uma única variável independente. Ou seja, é possível definir um espaço de fase de baixa dimensão que capture a dinâmica em uma estrutura geométrica imersa nesse espaço. O conjunto geométrico imerso é chamado de *atrator reconstruído* e ele é topologicamente equivalente ao atrator que seria produzido pela solução numérica do sistema dinâmico de equações, caso elas fossem conhecidas. Em particular, a dimensão e os expoentes de Lyapunov são aproximadamente os mesmos tanto para o atrator original como para o atrator reconstruído.

Um simples e poderoso método utilizado frequentemente é o método das *coordenadas de atraso temporal*, onde cada ponto no espaço de fase é uma n -tupla de consecutivos valores de uma série: $(\omega(t), \omega(t + \tau), \dots, \omega(t + [n - 1]\tau))$, onde $\omega(t)$ é a série temporal registrada, τ é o tempo de atraso de Takens e n é a dimensão de imersão do espaço de fases. O tempo τ é tipicamente algum múltiplo do espaçamento Δ entre os pontos da série temporal. Os atratores obtidos desta maneira são chamados *atratores reconstruídos*. A qualidade do atrator reconstruído é bastante sensível ao valor escolhido para o tempo de atraso. Por qualidade do atrator, entende-se quão bem definidas são as trajetórias que constituem a dinâmica do atrator. Na prática, atratores gerados com τ pequeno são fechados e mal definidos, valores elevados de τ geram atratores dispersos, ao passo que valores adequados de τ geram atratores abertos e com dinâmica bem definida. Estas situações estão ilustradas na Figura 3 tomando-se como base a série temporal em x obtida através do sistema de equações (1).

De forma geral, considerando a série temporal $\omega(t_1), \omega(t_2), \dots$ sucessivos pontos no espaço de fase formados pelas coordenadas de atraso temporal podem ser escritos como vetores y_j :

$$\begin{cases} y_1 = (\omega(t_1), \omega(t_1 + \tau), \dots, \omega(t_1 + (n - 1)\tau)) \\ y_2 = (\omega(t_2), \omega(t_2 + 2\tau), \dots, \omega(t_2 + (n - 1)\tau)), \\ \vdots \\ y_j = (\omega(t_j), \omega(t_j + \tau), \dots, \omega(t_j + (n - 1)\tau)) \\ \vdots \end{cases} \quad (2)$$

Devido a série temporal supostamente (por hipótese) ser o resultado de um processo determinístico, cada y_{j+1} é o resultado do mapeamento

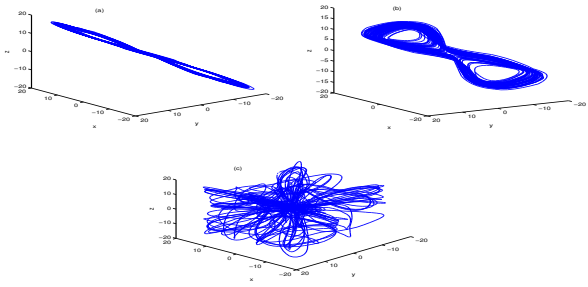


Figura 3: Exemplo da influência do tempo de atraso τ na reconstrução de atratores. Em (a) o tempo $\tau = 1$ é muito pequeno, em (b) o tempo $\tau = 6$ é adequado e em (c) o tempo de atraso $\tau = 20$ é muito grande

\mathcal{M} - geralmente desconhecido - do vetor y_j . Ou seja,

$$y_{j+1} = \mathcal{M}(y_j) \quad (3)$$

2.4 Escolhendo o tempo de atraso

A reconstrução do atrator com coordenadas de atraso temporal não é um processo automático. A escolha de um apropriado atraso τ é importante para o sucesso da reconstrução. Se τ é muito pequeno então as coordenadas $\omega(t_j), \omega(t_j + \tau), \omega(t_j + 2\tau), \dots$ de um dado vetor y_j são quase iguais uma a outra, conforme mostrado na Figura 3 (a). A cabeça de cada vetor no espaço de coordenadas de atraso se encontrará próxima da diagonal, e a reconstrução será inútil. Em essência, os pontos amostrais das séries temporais para $\omega(t)$ possuem espaçamento muito próximo para fornecer informação sobre a dinâmica do sistema.

Em outras palavras, as correlações entre estados dinâmicos em sistemas caóticos duram um tempo relativamente curto que depende do expoente de Lyapunov positivo. Assim, se τ é muito grande as coordenadas estão muito distantes uma da outra e conseqüentemente a correlação entre elas é muito baixa, conforme pode ser constatado na Figura 3 (c). Significantes dobras e esticamentos ocorrem e desta forma não há uma relação de causa entre os dados usados para formar as coordenadas de um ponto no espaço de fase. Diversos métodos para a escolha de τ tem sido propostos [5, 6, 1]. Uma simples aproximação é examinar a correlação entre os pares de pontos como uma função de seu tempo de separação. A função de auto-correlação é definida por

$$f(T) = \frac{\langle \omega(t) \cdot \omega(t + T) \rangle_t}{\langle \omega(t)^2 \rangle_t}, \quad (4)$$

onde $\langle \rangle_t$ indica uma média sobre todos os pontos em uma série. Então basta determinar o tempo T , do primeiro “zero” interceptando $f(T)$ como uma medida de correlação temporal. Como é procurado

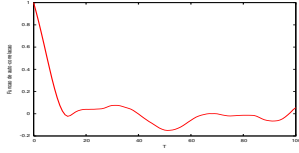


Figura 4: Função de auto-correlação da série temporal $\omega(t)$ para as equações de Lorenz

um valor de τ que produza uma alta correlação, uma modesta fração de \mathcal{T} , pode ser uma escolha razoável. A Figura 4 mostra a função de autocorrelação da série temporal em x da Equação (1) em função do tempo de separação de seus pontos.

[5] fazem uso de uma aproximação mais sofisticada para a seleção do atraso τ que envolve o conceito de informação mútua. Esta informação fornece uma medida de probabilidade onde pontos vizinhos, $\omega(t)$ e $\omega(t + \mathcal{T})$, não são estatisticamente independentes. Se $P(\omega(t))$ e $P(\omega(t + \mathcal{T}))$ são distribuições probabilísticas desjuntas de pontos vizinhos e se $P(\omega(t), \omega(t + \mathcal{T}))$ são distribuições probabilísticas conjuntas então a informação mútua pode ser definida como

$$I(\mathcal{T}) = \sum_t P(\omega(t), \omega(t + \mathcal{T})) \log \frac{P(\omega(t) \cdot \omega(t + \mathcal{T}))}{P(\omega(t)) \cdot P(\omega(t + \mathcal{T}))} \quad (5)$$

Se \mathcal{T} é grande então a probabilidade conjunta é igual ao produto das distribuições separadas e a informação mútua é nula. Assim o atraso τ é frequentemente escolhido como \mathcal{T}_{min} onde a informação mútua é obtida pelo seu primeiro mínimo.

A informação mútua indica em que grau parte da série temporal $\omega(t)$ contém informação, ou lembra, outras partes da mesma série temporal. Ela mede a dependência geral de duas variáveis, e fornece uma estimativa melhor para a escolha do tempo de atraso que o primeiro zero da função de autocorrelação, onde é considerada apenas a dependência linear. A Figura 5 mostra a função de informação mútua da série temporal em x da Equação (1) em função do seu tempo de atraso.

Devido a ausência de uma lei simples para a escolha do τ em situações práticas, o parâmetro τ pode ser regulado até que os resultados se tornem satisfatórios. Este procedimento pode introduzir erros, mas as quantidades invariante calculadas do atrator reconstruído não são frequentemente muito sensíveis a τ (dentro de um domínio sensato) se o

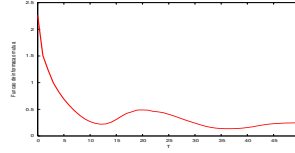


Figura 5: Função de informação mútua da série temporal $\omega(t)$ para as equações de Lorenz

número de graus de liberdade é pequeno.

2.5 Dimensão de imersão e a dimensão do atrator

Conforme a Figura 1 o atrator de Lorenz pode ser bem representado em um espaço tridimensional. Contudo, na reconstrução de uma série temporal arbitrária de dinâmica desconhecida, a dimensionalidade do atrator é desconhecida. É importante que a reconstrução seja *imersa* em um espaço de dimensionalidade suficientemente grande para representar sua dinâmica completamente.

Um critério para determinar esta dimensão utiliza a propriedade de “não-cruzamento” que assegura o determinismo natural das trajetórias. O mapa para a reconstrução em coordenadas de atraso no tempo,

$$y_{j+1} = \mathcal{M}(y_j) \quad (6)$$

deve ser inversível desde que ele seja o resultado de algum sistema dinâmico subjacente. [10] sugeriu que é suficiente que a dimensão de imersão E_D seja maior que a dimensão do atrator E_d de acordo com a seguinte relação

$$E_D \geq 2E_d + 1 \quad (7)$$

O cálculo da dimensão de correlação não requer que E_D seja suficientemente grande para satisfazer a Equação 7. [3] tem mostrado que, para uma série longa no tempo com baixo ruído, é suficiente que a dimensão no espaço de fase seja maior que a dimensão do atrator. Conseqüentemente a rigorosa condição de Takens pode não ser necessária para o cálculo da dimensão.

Contudo, a dimensão do atrator é usualmente desconhecida para dados experimentais e dessa forma a dimensão de imersão necessária é desconhecida. Felizmente há um procedimento que produz ambas quantidades simultaneamente. Se o atrator é imerso no espaço de dimensão progressivamente mais elevado ele exhibe cada vez mais uma estrutura complexa, com seus desdobramentos e suas medidas de dimensão aumentadas. Isto progride continuamente até que o atrator seja completamente revelado, num tal ponto que a região satura (em princípio). Quando esta condição é alcançada a dimensão de imersão é suficientemente alta.

O processo, proposto primeiramente por [7], reconstrói o atrator no espaço de baixa dimensão e calcula sua dimensão aparente. A dimensão do espaço de imersão é incrementada por 1; o atrator é então reconstruído em seu novo espaço de fase e sua dimensão é recalculada. Este processo é repetido até que um valor limite da dimensão de correlação seja alcançado. A dimensão de correlação descrita é o algoritmo típico usado para a reconstrução de atratores. É por definição uma técnica estática, já que a mesma é baseada na geometria do atrator em oposição à técnica dinâmica baseada nos expoentes de Lyapunov da série associada.

Pode-se dizer dessa maneira que a dimensão de correlação D_C é uma medida de densidade (ou dispersão) do atrator dentro de um espaço de fases. No caso de atratores reconstruídos, o número de variáveis independentes não é conhecido. Assim, para reconstruir o atrator é necessário arbitrar-se a dimensão do espaço de fases, dimensão esta conhecida como dimensão de imersão (*embedding dimension*), E_D .

Em sistemas aleatórios, D_C cresce indefinidamente com o aumento de E_D ; por outro lado, D_C atinge um valor constante quando o sistema é caótico. Em outras palavras para sistemas aleatórios, a densidade do atrator varia sempre que E_D aumentar. Se o sistema é caótico, haverá uma dimensão do espaço de fases a partir da qual a densidade do atrator se tornará constante (e, conseqüentemente D_C). A dimensão de correlação fornece uma estimativa do número de equações diferenciais necessárias para descrever a dinâmica global do sistema, seu valor é obtido através da relação:

$$D_C = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log(C(R))}{\log R} \quad (8)$$

onde a função de correlação integral, $C(R)$, é dada por

$$C(R) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \{n^e \text{ de pares } i, j \text{ tais que } |\vec{x}_i - \vec{x}_j| < R\} \quad (9)$$

onde \vec{x}_i e \vec{x}_j são elementos do espaço de fase reconstruído, N é o número de total de pontos deste mesmo espaço, e R uma distância arbitrária.

Análises semelhantes, usando dados da série experimental de Lorenz, são mostradas nas Figuras 6 e 7. O gráfico de $\log(C)$ versus $\log(R)$ parece ter regiões de escala linear cujas inclinações incrementam com a dimensão de imersão até que um valor limite seja alcançado. Entretanto, para fazer um teste quantitativo, é mais conveniente plotar a inclinação, $d(\log C(R))/d(\log R)$; esta quantidade é mostrada na Figura 7 para dimensões de imersão variando de 1 a 10.

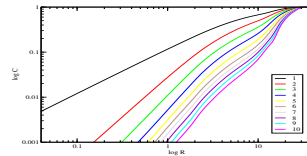


Figura 6: Correlação integral dos dados experimentais para espaços de imersão variável

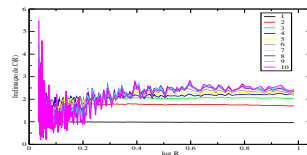


Figura 7: Inclinações da correlação integral para $1 \leq D \leq 10$. A secção média desses gráficos é de aproximadamente $d \approx 2.6$. A inclinação satura quando $D \geq 4$

Atratores reconstruídos fornecem, em princípio, uma forma de distinção entre ruídos estocásticos e dinâmicas determinísticas. Dados dominantes por ruídos estocásticos ocupam um espaço de imersão de dimensão arbitrariamente elevada, de modo que a dimensão aparente do atrator não alcança um valor limite quando D é incrementado.

2.6 Expoente de Lyapunov

O expoente de Lyapunov, λ , é um parâmetro de caracterização dinâmica de atratores. Ele mede a taxa de divergência de órbitas vizinhas (e consecutivas) dentro do atrator e, assim, quantifica a dependência, ou sensibilidade do sistema às condições iniciais. Analogamente, pode-se dizer que o expoente de Lyapunov fornece uma indicação de quão rápido perde-se informação movendo-se ao longo do atrator. Em sistemas caóticos, associados a um atrator estranho, a dependência das condições iniciais implica na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov positivo.

2.6.1 Expoente de Lyapunov em séries temporais

Em séries temporais experimentais, o ponto de partida para o cálculo dos expoentes é o atrator reconstruído, em uma dimensão de imersão adequada. Uma vez reconstruído o atrator, define-se uma trajetória fiducial a partir da seqüência de vetores reconstruídos. A seguir, deve-se analisar o que ocorre com pontos vizinhos desta trajetória. Com as informações sobre as taxas de divergência destes pontos, pode-se obter então os expoentes de Lyapunov.

Existem vários métodos para o cálculo dos expoentes, os quais se diferem na maneira de analisar a dinâmica ao longo da trajetória fiducial. Os métodos mais conhecidos são o método de Wolf e o método de Eckmann e Ruelle. Neste trabalho, o maior expoente positivo de Lyapunov será estimado

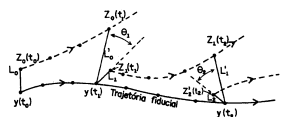


Figura 8: Representação esquemática do método proposto por [12]. O maior expoente de Lyapunov é estimado a partir da taxa de crescimento dos segmentos L_i . Quando o comprimento do segmento que liga dois pontos próximos do atrator excede um certo valor ϵ , um novo vizinho é escolhido de forma a minimizar o ângulo θ_i

a partir do método de Wolf.

O método de Wolf

O método proposto por Wolf [12] trata de um algoritmo que permite a estimativa dos expoentes de Lyapunov não negativos de uma série experimental. Num primeiro momento calcula-se o maior expoente de Lyapunov positivo (λ_1), e, depois, o segundo maior expoente λ_2 (se, positivo), e assim sucessivamente. A separação entre dois pontos próximos define um eixo principal e a reortonormalização é substituída pela procura de um novo ponto, próximo à trajetória fiducial, que preserve ao máximo a orientação desse eixo. Considere-se uma trajetória fiducial no atrator reconstruído. Seja essa trajetória descrita pela seqüência de pontos $y(t_0), y(t_1), y(t_2), \dots$. Seja $z_0(t_0)$ o vizinho no atrator reconstruído mais próximo de $y(t_0)$ e L_0 a distância entre $y(t_0)$ e $z_0(t_0)$ (Figura 8, extraída de [4]), isto é, $L_0 = |y(t_0) - z_0(t_0)| < \epsilon$, ou seja, $z_0(t_0)$ está dentro da hipersfera de raio ϵ centrada em $y(t_0)$. Acompanha-se então a evolução temporal de z_0 e y_0 até que num instante t_1 a distância entre esses pontos, L_0' , exceda ϵ . Nesse momento substitui-se z_0 por um novo vizinho, mais próximo de $y(t_1)$, que esteja na direção do segmento L_0' e tal que $L_1 = |y(t_1) - z_1(t_1)| < \epsilon$. O processo prossegue até que todos os pontos $y(t_i)$ tenham sido percorridos. O maior expoente de Lyapunov positivo é obtido como a média de $\ln L_i'/L_i$, ao longo da trajetória fiducial, isto é,

$$\lambda_1 = \frac{1}{t_M - t_0} \sum_{i=0}^{M-1} \log_2 \frac{L_i'}{L_i} \quad (10)$$

onde M é o número total de vezes que se escolheu um novo vizinho próximo à trajetória fiducial.

Através do método descrito acima é possível obter uma aproximação numérica para o maior expoente de Lyapunov associado ao sistema de equações diferenciais ordinárias (1). Neste caso, λ_1 foi calculado a partir da série temporal $x(t)$ que é parte da solução desse mesmo sistema. Pode-se observar que a aproximação numérica obtida é satisfatória, já que o maior expoente de Lyapunov obtido diretamente do Sistema de Equações Diferenciais (1) é

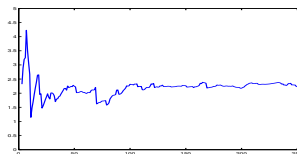


Figura 9: Convergência do maior expoente de Lyapunov, a saber, $\lambda_1 = 2.282815$ com base no algoritmo desenvolvido por [12]

aproximadamente 2.16 (conforme [12]).

Referências

- [1] A. M. Albano, J. Muench, C. Schwartz, A. L. Mees, P. E. Rapp, Singular-value decomposition and the Grassberger-Procaccia algorithm, *Physical Review A.*, 38 (1988).
- [2] G. L. Baker, J. P. Gollub, "Chaotic Dynamics: an introduction", Cambridge: University Press, 1996.
- [3] M. Ding, C. Grebogi, E. Ott, T. Sauer, J. A. York, Plateau onset for correlation dimension: when does it occur?, *Physical Review Letters.*, 70 (1993a).
- [4] N. F. Ferrara, C. P. C. Prado, "Caos: uma introdução", Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1995.
- [5] A. M. Fraser, H. Swinney, Independent coordinates for strange attractors from mutual information, *Physical Review A.*, 33 (1986).
- [6] A. M. Fraser, Information and entropy in strange attractors, *IEEE Trans. on Information Theory.*, 35 (1989).
- [7] P. Grassberger, I. Procaccia, Characterization of strange attractors, *Physical Review Letters.*, 50 (1983).
- [8] E. Lorenz, Deterministic non-periodic flow, *Journal of Atmospheric Sciences.*, 20 (1963) 130-41.
- [9] D. Ruelle, F. Takens, On the nature of turbulence, *Communications in Mathematical Physics.*, 20 (1970) 167-192.
- [10] F. Takens, Detecting strange attractors in turbulence, *Dynamical systems and turbulence.*, 898 (1981).
- [11] F. Takens, Dynamical systems and turbulence, *Proceedings of a symposium held at the university of warwick.*, (1979-1980) 366-381.
- [12] A. Wolf, J. B. Swift, J. A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica.*, 16D (1985).