

Proposta Metodológica e Experimento Numérico na Otimização da Produção Agrícola com Restrições Hídricas

A. R. Sanchez Delgado, V. Neves Lima, R. Neves Figueiredo Dos Santos

Departamento de Matemática. Instituto de Ciências Exatas. UFRRJ, Br 465, Km.7, Seropédica, 23851-970, Rio de Janeiro, RJ

E-mail: asanchez@ufrj.br, valdo@ufrj.br, nevesmat@yahoo.com.br

D. Fonseca de Carvalho

Departamento de Engenharia Agrícola, Instituto de Tecnologia, UFRRJ, Br 465, Km. 7, Seropédica, 23851-970, Rio de Janeiro, RJ

E-mail: carvalho@ufrj.br

Com este trabalho, objetiva-se desenvolver um procedimento pontos interiores primal-dual, para resolução do problema de programação linear (PPL), associado à otimização da produção agrícola com restrições hídricas:

$$(P) \text{ Maximizar } \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{12} (p_{ij} p r_i - c_{ij}) x_{ij}$$

$$\text{Sujeito a: } \sum_{i=1}^m v_{ij} x_{ij} \leq v_j \quad j = 1, \dots, 12$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq a_j \quad j = 1, \dots, 12$$

$$x_{ij} \geq 0$$

na qual i representa uma cultura, sendo m o número total de culturas consideradas, $m \geq 2$, j é um inteiro entre 1 e 12 representando o respectivo mês do ano, p_{ij} é o preço da cultura i no mês j (R\$/Kg), $p r_i$ mede a produtividade média da cultura i (Kg/ha), c_{ij} a média dos custos médios da cultura i no mês j (R\$/ha), x_{ij} a área cultivada com a cultura i no mês j (ha), v_{ij} é o volume de água (m³/ha) utilizado com a cultura i durante o mês j , considerando-se a eficiência de aplicação, v_j o volume de água disponível no mês j (m³) e a_j a área total possível de ser irrigada no mês j (ha). Desta maneira (P) tem uma função objetivo que visa maximizar a receita líquida em relação à área cultivada com as culturas plantadas, tendo-se como restrições a quantidade de água disponível e área irrigável (ver [4],[6]).

Da teoria de dualidade, sabe-se que o problema de programação linear dual (D) associado a (P), é formulado como:

$$(D) \text{ Minimizar } f(u, \zeta) = \sum_{j=1}^{12} v_j u_j + \sum_{j=1}^{12} a_j \zeta_j$$

$$\text{Sujeito a: } v_{ij} u_j + \zeta_j \geq r_{ij} \quad (i=1, \dots, m; j=1, \dots, 12)$$

$$u_j, \zeta_j \geq 0$$

onde u_j, ζ_j são variáveis duais associadas, respectivamente, às restrições primais de volume de água (hídricas) e de área cultivada no mês j ; enquanto $r_{ij} = p_{ij} p r_i - c_{ij}$. Além disso, representam respectivamente, u_j : o valor de comercialização de 1000 m³ de água (R\$/m³) no mês j ; ζ_j : o valor de comercialização de um hectare irrigado (R\$/ha) no mês j e r_{ij} : a receita ou renda, proporcionada pela cultura i no mês j . Note-se que a restrição $v_{ij} u_j + \zeta_j \geq r_{ij}$ pode ser escrita como $v_{ij} u_j + \zeta_j - z_{ij} = r_{ij}$ sendo $z_{ij} \geq 0$. Assim o problema (D) é equivalente ao problema de programação linear (D₌):

$$(D_{=}) \text{ Minimizar } f(u, \zeta)$$

$$\text{Sujeito a: } v_{ij} u_j + \zeta_j - z_{ij} = r_{ij}$$

$$u_j, \zeta_j, z_{ij} \geq 0$$

Na procura do procedimento, associa-se ao problema (D₌), o problema barreira logarítmica, denotado por (D_μ), $\mu > 0$:

$$(D_{\mu}) \text{ Minimizar } \phi_{\mu}(u, \zeta, z)$$

$$\text{Sujeito a: } g_{ij}(u, \zeta, z) = 0$$

$$u_j, \zeta_j, z_{ij} > 0$$

onde

$$\phi_{\mu}(u, \zeta, z) = f(u, \zeta) - \mu \left(\sum_{j=1}^{12} \ln(u_j) + \sum_{j=1}^{12} \ln(\zeta_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{12} \ln(z_{ij}) \right)$$

$$\text{e } g_{ij}(u, \zeta, z) = v_{ij} u_j + \zeta_j - z_{ij} - r_{ij} = 0.$$

Fato importante a ser observado é que esse não é só um problema associado a (D₌), mas uma família de problemas indexados pelo parâmetro μ . Cada (D_μ) é um problema de programação não linear, uma vez que o objetivo, chamado de barreira logarítmica é não linear. Também para cada μ , o mínimo é alcançado em um ponto interior do conjunto de soluções viáveis de (D_μ), e quando μ tende a zero, este ponto se move até um ponto “próximo” de uma solução ótima primal-dual. Como função de μ , o conjunto de soluções ótimas dos problemas barreiras, fornece uma curva, caminho ou trajetória,

contida no interior da região de viabilidade de (D_-) e denominada trajetória central (ver [1], [10]). Por outro lado, usando multiplicadores de Lagrange, é possível estudar a solução do problema. Nessa direção, define-se o Lagrangeano associado a (D_μ) como:

$$L_\mu(u, \zeta, z, x) = \phi(u, \zeta, z) - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{12} x_{ij} g_{ij}(u, \zeta, z)$$

As condições de primeira ordem para otimalidade ficam representadas através do sistema:

$$\frac{\partial L_\mu}{\partial u_j} = v_j - \frac{\mu}{u_j} - \sum_{i=1}^m v_{ij} x_{ij} = 0$$

$$\frac{\partial L_\mu}{\partial \zeta_j} = a_j - \frac{\mu}{\zeta_j} - \sum_{i=1}^m x_{ij} = 0$$

$$\frac{\partial L_\mu}{\partial x_{ij}} = v_{ij} u_j + \zeta_j - z_{ij} - r_{ij} = 0$$

$$\frac{\partial L_\mu}{\partial z_{ij}} = -\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{12} \frac{\mu}{z_{ij}} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{12} x_{ij} = 0$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, 12$.

Fazendo-se $\eta_j = \frac{\mu}{u_j} > 0$ e $\gamma_j = \frac{\mu}{\zeta_j} > 0$, o sistema se transforma para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, 12$; em:

$$\sum_{i=1}^m v_{ij} x_{ij} + \eta_j - v_j = 0$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} + \gamma_j - a_j = 0$$

$$v_{ij} u_j + \zeta_j - z_{ij} - r_{ij} = 0$$

$$u_j \eta_j - \mu = 0$$

$$\zeta_j \gamma_j - \mu = 0$$

$$x_{ij} z_{ij} - \mu = 0$$

$$x_{ij}, u_j, \zeta_j, \eta_j, \gamma_j, z_{ij} > 0$$

O sistema anterior representa um sistema de $24(m+2)$ equações lineares e não lineares com $24(m+2)$ variáveis. Na forma matricial, esse sistema pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} Ax + w &= b \\ A^T y - z - r &= 0 \\ YWe_{24} - \mu e_{24} &= 0 \\ XZe_{12m} - \mu e_{12m} &= 0 \end{aligned}$$

no qual,

$$A = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdot & \cdot & \cdot & V_m \\ I_{12} & I_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & I_{12} \end{bmatrix} \text{ é,}$$

uma matriz $24 \times 12m$; cujos blocos $V_i = \text{diag}(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{i12})$ e I_{12} é a matriz identidade 12×12 . Suponha que existem pelo menos duas culturas diferentes i e k tal que para todo mês $j = 1, \dots, 12$: v_{ij} é diferente de v_{kj} ; isto é, o volume de água necessário para a cultura i é diferente do volume de água a ser utilizado com a cultura k em cada mês. Desta maneira, o posto de A é completo.

$$x^T = (x_{ij}), w^T = (\eta, \gamma), b^T = (v, a), v^T = (v_1, v_2, \dots, v_{12}),$$

$$a^T = (a_1 a_2, \dots, a_{12}), y^T = (u, \zeta), z^T = (z_{ij}), r^T = (r_{ij}).$$

Também nessa representação matricial, temos as estruturas blocos diagonais 24×24 : $Y = \text{diag}(y)$, $W = \text{diag}(w)$ e as de dimensão $12m \times 12m$: $X = \text{diag}(x)$, $Z = \text{diag}(z)$, e_{24}^T é o vetor unitário em R^{24} e e_{12m}^T o vetor unitário em R^{12m} .

O sistema anterior pode ser resolvido usando-se um método de trajetória central primal-dual gerado da aplicação do método de Newton (ver [1], [2], [8]).

Portanto, dado um ponto estritamente positivo (x, y, w, z) e fixando-se apropriadamente um μ estritamente positivo, iterativamente obtém-se um vetor direção $(\Delta x, \Delta y, \Delta w, \Delta z)$ e tal que $(x + \Delta x, y + \Delta y, w + \Delta w, z + \Delta z)$ satisfaz:

$$A(x + \Delta x) + (w + \Delta w) - b = 0$$

$$A^T(y + \Delta y) - (z + \Delta z) - r = 0$$

$$(Y + \Delta Y)(W + \Delta W)e_{24} - \mu e_{24} = 0$$

$$(X + \Delta X)(Z + \Delta Z)e_{12m} - \mu e_{12m} = 0$$

Considerando $(\Delta x, \Delta y, \Delta w, \Delta z)$ como vetor de incógnitas, têm-se:

$$A\Delta x + \Delta w = \rho$$

$$A^T \Delta y - \Delta z = \sigma$$

$$Y\Delta w + W\Delta y + \Delta Y\Delta W e_{24} = f_{yw}$$

$$X\Delta z + Z\Delta x + \Delta X\Delta Z e_{12m} = f_{xz}; \text{ onde}$$

$$\rho = b - Ax - w, \sigma = r - A^T y + z, f_{yw} = \mu e_{24} - YWe_{24}$$

e $f_{xz} = \mu e_{12m} - XZe_{12m}$, representam a inviabilidade primal, dual e folgas complementares respectivamente. Essas equações definem um sistema nas variáveis componentes do vetor direção e mostra-se que, depois de ser aplicado o método de Newton, o vetor direção coincide com a única solução do sistema linear obtido ao se eliminar os termos não lineares no sistema anterior ([2]), isto é, coincide com a única solução do sistema linear de $24(m+2)$ equações e $24(m+2)$ variáveis dado por:

$$\begin{aligned}
A\Delta x + \Delta w &= \rho \\
A^T \Delta y - \Delta z &= \sigma \\
Y\Delta w + W\Delta y &= f_{yw} \\
X\Delta z + Z\Delta x &= f_{xz}
\end{aligned}$$

A unicidade da solução do sistema deve-se ao fato de que o posto da matriz A é completo (ver [9]). Manipulando as equações anteriores, obtemos que Δx deve resolver o sistema linear:

$$(X^{-1}Z + A^T W^{-1}YA)\Delta x = \vartheta,$$

onde:

$$\vartheta = \sigma + A^T W^{-1}Y\rho + X^{-1}f_{xz} - A^T W^{-1}f_{yw}.$$

Também $\Delta w, \Delta y, \Delta z$ podem ser obtidas pelas fórmulas:

$$\begin{aligned}
\Delta w &= \rho - A\Delta x, \\
\Delta y &= W^{-1}(f_{yw} - Y\Delta w) \\
\Delta z &= A^T \Delta y - \sigma.
\end{aligned}$$

Agora, o procedimento conceitual primal-dual para resolver o problema de otimização da receita líquida na produção agrícola com restrições hídricas, pode ser resumido como segue: A partir de um ponto estritamente positivo, em qualquer iteração, calcula-se a direção de Newton e um tamanho de passo apropriado para que a não negatividade das variáveis seja mantida. O procedimento termina quando o tamanho do intervalo de dualidade (ou “gap” de dualidade) e a inviabilidade primal-dual forem menores que uma tolerância pré-determinada. Já o procedimento implementado e testado será a seguir apresentado.

PROCEDIMENTO PRIMAL-DUAL

Dados

* m inteiro positivo (número de culturas), $m \geq 2$.

* (p_{ij}) -matriz de preços cultura-mês.

* (v_{ij}) tal que $\exists i, k$ -culturas ($i \neq k$): $v_{ij} \neq v_{kj}$.

* $V_i = \text{diag}(v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{i12})$;

* $A = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \dots & V_m \\ I_{12} & I_{12} & \dots & I_{12} \end{bmatrix}$;

* $v^T = (v_1, v_2, \dots, v_{12})$ - vetor volume de água.

* $a^T = (a_1, a_2, \dots, a_{12})$ - vetor de área irrigável.

* $b^T = (v, a)$.

* $c^T = (c_{11}, c_{12}, \dots, c_{112}, \dots, c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{m12})$

* $pr = (pr_i)$ -vetor de produção média de cada cultura.

* $r = (r_{ij})$ - vetor receita marginal.

* $x^0 = z^0 = e_{12m}, y^0 = w^0 = e_{24}, \mu_0 = 0.1$.

* $0 < \varepsilon < 1$; $\beta = 0.695$.

Começo

Inicialização:

$$x = x^0, y = y^0, w = w^0, z = z^0, \mu = \mu^0.$$

Enquanto

$$x^T z + y^T w > \varepsilon, \|b - Ax - w\|_1 > \varepsilon, \|r - A^T y + z\|_1 > \varepsilon$$

Fazer $X = \text{diag}(x), Z = \text{diag}(z), Y = \text{diag}(y),$

$$W = \text{diag}(w).$$

$$D^2 = X^{-1}Z, E^2 = YW^{-1}, B = (D^2 + A^T E^2 A)$$

$$\rho = b - Ax - w, \sigma = r - A^T y + z,$$

$$f_{yw} = \mu e_{24} - YW e_{24}, f_{xz} = \mu e_{12m} - XZ e_{12m}.$$

$$\vartheta = \sigma + A^T E^2 \rho + X^{-1} f_{xz} - A^T W^{-1} f_{yw}.$$

Resolver $B\Delta x = \vartheta$

Fazer $\Delta w = \rho - A\Delta x$

$$\Delta y = W^{-1} f_{yw} - E^2 \Delta w$$

$$\Delta z = A^T \Delta y - \sigma.$$

Calcular

$$\tau = \text{Max}(\|X^{-1}\Delta x\|_\infty, \|Y^{-1}\Delta y\|_\infty, \|W^{-1}\Delta w\|_\infty, \|Z^{-1}\Delta z\|_\infty)$$

$$\theta = \text{Min}\left(\frac{0.995}{\tau}, 1\right)$$

Novo iterado

$$x = x + \theta \Delta x; \quad w = w + \theta \Delta w;$$

$$y = y + \theta \Delta y; \quad z = z + \theta \Delta z.$$

Fazer $\mu = \beta \mu$

Fim.

Para a execução da experiência numérica do procedimento, foram utilizados dados do perímetro irrigado de Gortuba (região norte do Estado de Minas Gerais) descritos em [5]. O perímetro está composto por um conjunto de lotes, e nesta experiência foi considerado um lote modelo, que tem área irrigada por sulco e boa diversidade de características físico-hídricas dos solos. Foi simulado o plantio de quatro culturas anuais: Abóbora (Abó), Feijão (Fei), Milho (Mil), Quiabo (Qui); e de quatro culturas perenes: Banana Prata (B₁), Banana Nanica (B₂), Limão (Lim) e Manga (Man). As tabelas 1 e 2 apresentam os preços, produtividade e custos das culturas anuais e perenes respectivamente. Para se testar a eficácia do procedimento proposto foram considerados os preços fornecidos em [4].

Note que nesta tabela : $c_{ij} = c_i$, para todo j . Observando a tabela, verifica-se os meses em que a oferta das culturas varia ao longo do ano. Em função destas ofertas, as datas de plantio para as culturas anuais foram adotadas, considerando a duração média do ciclo de cada cultura. Por exemplo, o feijão apresenta preço competitivo em 9 meses do ano, assim foi considerado como mês de plantio aquele que antecedia em 3 meses, o mês com aquele preço. Por isso, foram considerados, como meses de plantio: janeiro, fevereiro, março, abril, maio, julho, agosto, outubro e novembro, totalizando 9 épocas. O mesmo foi feito para as outras três culturas anuais, obtendo-se um mês de plantio para abóbora, sete para milho e dois para quiabo. Para as áreas irrigáveis por mês a_j , considerou-se a área máxima possível de ser ocupada com o cultivo no lote modelo, igual a 38 ha. Os volumes de água culturais (v_{ij}) e os totais de água disponíveis por mês (v_j), podem ser vistos em [5]. A condição para que a matriz A tenha posto completo, faz sentido com os dados, por exemplo, as culturas, banana prata e manga não precisam da mesma quantidade de água durante cada mês do ano. A implementação usa como linguagem computacional: MATLAB 6.1, em uma AMD ATHLON XP 2.4 GHZ, 128 MB RAM. A tabela 3 mostra as áreas a serem cultivadas pelas culturas anuais: Abóbora e Feijão. A tabela 4 mostra as áreas a ser cultivadas pelas culturas anuais: Milho e Quiabo. A tabela 5 mostra as áreas a ser cultivadas pelas culturas perenes: Banana Prata, Banana Nanica, Limão e Manga.

Os resultados obtidos com o procedimento aqui desenvolvido, são compatíveis a nível de solução e receita de R\$202.519,80 com os apresentados em [4], onde o (PPL) é resolvido usando o software LINDO ([7]), que utiliza o conhecido método SIMPLEX ([3]). Mais ainda, considerando que o número de colunas da matriz A (12m) cresce linearmente em função do número de culturas (m) e que a técnica pontos interiores primal-dual é bem comportada na resolução de PPL's de médio e grande porte, achamos interessante a realização de um experimento numérico da metodologia anterior com o cenário agrícola de Gortuba.

Finalmente, pode-se concluir que o procedimento primal-dual aqui apresentado, representa uma boa ferramenta para a otimização da renda na produção, permitindo um melhor ajuste das condições sobre restrições hídricas, e conseqüentemente, aponta como alternativa à modelagem matemática e ao desenvolvimento dos métodos de tratamento desse problema na literatura.

| <i>Mês</i> | <i>Abó</i> | <i>Fei</i> | <i>Mil</i> | <i>Qui</i> | |
|------------|------------|------------------|------------|------------|--|
| | | Preços | (R\$/ Kg) | | |
| <i>Jan</i> | | 0.662 | | | |
| <i>Fev</i> | | 0.500 | 0.180 | 0.400 | |
| <i>Mar</i> | | | 0.154 | | |
| <i>Abr</i> | | 0.750 | 0.148 | | |
| <i>Mai</i> | | 0.831 | 0.156 | | |
| <i>Jun</i> | | 0.830 | | | |
| <i>Jul</i> | | 0.829 | 0.161 | | |
| <i>Ago</i> | | 0.756 | 0.164 | 0.455 | |
| <i>Set</i> | | | | | |
| <i>Out</i> | | 0.818 | | | |
| <i>Nov</i> | 0.200 | 0.752 | 0.156 | | |
| <i>Dez</i> | | | | | |
| | | Produção | (Kg / ha) | | |
| | 10.640 | 1.150 | 1.660 | 8.000 | |
| | | Custos (R\$/ ha) | | | |
| | 2.674,20 | 965,00 | 651,00 | 3.611,50 | |

Tabela 1. Preços, Produção Média e Custos das Culturas Anuais

| <i>Mês</i> | B_1 | B_2 | <i>Lim</i> | <i>Man</i> | |
|------------|----------|------------------|------------|------------|--|
| | | Preços | (R\$/ Kg) | | |
| <i>Jan</i> | 0.401 | 0.084 | 0.307 | | |
| <i>Fev</i> | 0.484 | 0.085 | 0.188 | | |
| <i>Mar</i> | 0.375 | 0.158 | 0.180 | | |
| <i>Abr</i> | 0.404 | 0.126 | 0.180 | | |
| <i>Mai</i> | 0.431 | 0.091 | 0.364 | | |
| <i>Jun</i> | 0.601 | 0.090 | | | |
| <i>Jul</i> | 0.592 | 0.092 | 0.161 | | |
| <i>Ago</i> | 0.413 | 0.219 | 0.402 | 1.00 | |
| <i>Set</i> | 0.315 | 0.182 | 0.751 | | |
| <i>Out</i> | 0.214 | 0.269 | 0.751 | | |
| <i>Nov</i> | 0.215 | 0.158 | 0.384 | 0.294 | |
| <i>Dez</i> | 0.198 | 0.092 | 0.429 | 0.219 | |
| | | Produção | (Kg / ha) | | |
| | 26.000 | 44.000 | 22.000 | 18.000 | |
| | | Custos (R\$/ ha) | | | |
| | 1.951,50 | 2.676,50 | 996,40 | 1.615,90 | |

Tabela 2. Preços, Produção Média e Custos das Culturas Perenes.

| <i>Culturas</i> | <i>Mês</i> | x_{ij}^* (ha) | x_{ij}^{**} (ha) |
|-----------------|------------|-----------------|--------------------|
| <i>Abó</i> | <i>Jun</i> | 0 | 0,01 |
| <i>Fei</i> | <i>Jan</i> | 17,18 | 17,15 |
| <i>Fei</i> | <i>Fev</i> | 0 | 0,01 |
| <i>Fei</i> | <i>Mar</i> | 0 | 0,02 |
| <i>Fei</i> | <i>Abr</i> | 0 | 0,001 |
| <i>Fei</i> | <i>Mai</i> | 0 | 0,02 |
| <i>Fei</i> | <i>Jul</i> | 0 | 0,01 |
| <i>Fei</i> | <i>Ago</i> | 13,87 | 13,81 |
| <i>Fei</i> | <i>Out</i> | 0 | 0,04 |
| <i>Fei</i> | <i>Nov</i> | 0 | 0,01 |

Tabela 3. As culturas Abóbora e Feijão por meses de plantio. x_{ij}^* -área a ser cultivada obtida em [5], x_{ij}^{**} -área a ser cultivada resultante da aplicação do procedimento primal-dual.

| <i>Culturas</i> | <i>Mês</i> | x_{ij}^* (ha) | x_{ij}^{**} (ha) |
|-----------------|------------|-----------------|--------------------|
| <i>Mil</i> | <i>Jan</i> | 0 | 0,03 |
| <i>Mil</i> | <i>Mar</i> | 0 | 0,01 |
| <i>Mil</i> | <i>Abr</i> | 0 | 0,01 |
| <i>Mil</i> | <i>Jul</i> | 0 | 0,001 |
| <i>Mil</i> | <i>Out</i> | 0 | 0,001 |
| <i>Mil</i> | <i>Nov</i> | 0 | 0,01 |
| <i>Mil</i> | <i>Dez</i> | 13,87 | 13,81 |
| <i>Qui</i> | <i>Abr</i> | 19,89 | 19,86 |
| <i>Qui</i> | <i>Out</i> | 6,02 | 6,00 |

Tabela 4. As culturas Milho e Quiabo por meses de plantio. x_{ij}^* -área a ser cultivada obtida em [5], x_{ij}^{**} -área a ser cultivada resultante da aplicação do procedimento primal-dual.

| <i>Culturas</i> | <i>Mês</i> | x_{ij}^* (ha) | x_{ij}^{**} (ha) |
|-----------------|------------|-----------------|--------------------|
| B_1 | - | 18,11 | 18,11 |
| B_2 | - | 0 | 0,001 |
| <i>Lim</i> | - | 0 | 0,02 |
| <i>Man</i> | - | 0 | 0,01 |

Tabela 5. As culturas perenes. x_{ij}^* -área a ser cultivadas obtida em [5], x_{ij}^{**} -área a ser cultivada resultante da aplicação do procedimento primal-dual.

Referências Bibliográficas

- [1] M.C Bazarara, H.D. Sherali, C.M. Shetty. "Nonlinear Programming: Theory and Algorithms". John Wiley and Sons, Inc.(1979).
- [2] J.E Beasley. "Advances in Linear and Integer Programming" Clarendon Press. Oxford (1996).
- [3] G.B.Dantzigr "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press. Princeton, N.Y. (1963).
- [4] D.Fonseca de Carvalho, A.S.Alves, C.A.R.S. Álvares, G.G. Sedyama, F.P.Falco."Otimização do Uso da Água no Perímetro Irrigado do Gorutuba, Utilizando-se a Técnica de Programação Linear". Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, v.4,2,pp 203-209 (2000)
- [5] D. Fonseca de Carvalho. "Otimização de Recursos Hídricos no Perímetro Irrigado do Gorutuba". Tese de Doutorado apresentada na UFV, Julho, 1998.
- [6] J.A. Frizzone, R.D. Coelho, D. Neto Dourado, R. Soliane. "Linear Programming Model to Optimize the water Resource Use in irrigation Projects: An Application to the Senator Nilo Coelho Project". Sci. Agric. Piracicaba, 54 (número especial) pp 136-148 (1997).
- [7] P.E.Gill, W. Murray, M.H. Wright." Practical Optimization" Academic Press, London and New York (1981).
- [8] P.E. Gill, W. Murray." Newton-Type Methods for unconstrained and Linearly Constrained Optimization Math.Prog., 7,pp 311-350 (1974a).
- [9] G.H. Golub, C.Van Loan." Matrix Computations". The Johns Hopkins University Press. (2nd Edition) (1989).
- [10]C.C.Gonzaga." Path Following Methods for Linear programming". SIAM Review, 34 (2), pp 167-227 (1992).