

Dinâmica e Controle de Regimes Caóticos do Sistema de Lotka-Volterra

Marat Rafikov, Angela Beatriz Weber[†]

Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul -UNIJUI[†]
Rua São Francisco, 501, C.P. 560,
CEP 98700-000, Ijuí – RS, Brasil
E-mail: rafikov@unijui.tche.br, angeber@yahoo.com.br

Resumo

O controle de sistemas não-lineares que exibem comportamento caótico vem sendo enfoque de várias pesquisas científicas nos últimos anos. Neste trabalho, é feita uma análise sobre a equivalência e comparação entre os controles feedback linear e não-linear para o sistema não-linear de Lotka-Volterra de duas presas e um predador que exibe comportamento caótico. Esta comparação serve de base para justificativa de aplicação do controle linear feedback para sistemas não-lineares, incluindo os sistemas caóticos. As funções do controle ótimo foram encontradas com base na equação de Hamilton-Jacobi-Bellman da Programação Dinâmica. A comparação do controle linear e não-linear para o mesmo sistema mostrou que existe possibilidade de controlar o sistema por meio do controle linear, satisfazendo certas condições suficientes.

Palavras-chave: caos determinístico, controle feedback, Lotka-Volterra duas presas e um predador.

1. Introdução

O sistema de Lotka-Volterra é um modelo importante que descreve as interações entre presa e predador em um ecossistema. Foi desenvolvido independentemente por Lotka (1925) e por Volterra (1926). O modelo presa-predador de Lotka-Volterra em sua forma original foi muito criticado pelos matemáticos e biólogos por ser bastante simplificado para tratar um processo tão complexo como é o de interação entre espécies, além do que exibe uma dinâmica (oscilações periódicas) rara na natureza. Os modelos de Lotka-Volterra com número de espécies maior que dois apresentam uma dinâmica mais rica. Um dos exemplos é o modelo de Lotka-Volterra para duas presas e um predador que apresenta-se na seguinte forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i \left(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \right) \quad i=1,2,3 \quad (1)$$

onde

x_1, x_2, x_3 são as densidades da primeira presa, segunda presa e predador, respectivamente; a_{ij} são coeficientes que admitem a interação entre as espécies da população;

r_i é a taxa de crescimento da população i .

De acordo com Vance [5] e Gilpin [3] o sistema apresenta comportamento caótico para os seguintes parâmetros:

$$r_1 = r_2 = -r_3 = 1, a_{11} = a_{12} = 0,001; a_{22} = 0,001; \\ a_{21} = 0,0015; a_{13} = 0,01; a_{23} = 0,001; a_{31} = -0,005; \\ a_{32} = -0,0005; a_{33} = 0.$$

A Figura 1 apresenta as trajetórias temporais caóticas deste sistema. A Figura 2 mostra o diagrama de fase do sistema para os parâmetros descritos.

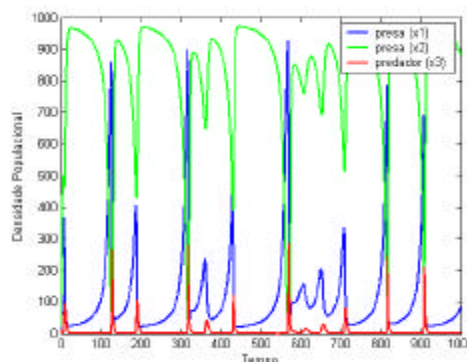


Figura 1. Trajetórias temporais caóticas do sistema Lotka-Volterra.

No trabalho atual são apresentados dois métodos de controle do sistema caótico acima referido e são feitas a análise e comparação entre os controles feedback linear e não-linear para o sistema não-linear de Lotka-Volterra de duas presas e um predador que exibe comportamento caótico.

[†]Bolsista da CAPES

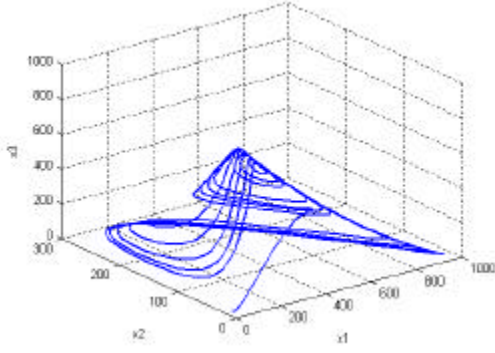


Figura 2. Diagrama de fase do sistema Lotka-Volterra com condição inicial (10;20;1)

2. Controle linear feedback do sistema de duas presas e um predador

O sistema (1) pode ser controlado através do controle linear a fim de levá-lo de um estado caótico para um ponto ou trajetória desejada. Seja \tilde{x} esta trajetória, então o sistema controlado tem a forma:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= x_i(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j) + U_i \quad i=1,2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_3(-r_3 + a_{31}x_1 + a_{32}x_2) + U_3 \end{aligned} \quad (2)$$

onde

$$U_i = \tilde{u}_i + u_i \quad i=1,2,3. \quad (3)$$

A parte \tilde{u} do vetor de controle mantém o sistema controlado na trajetória desejada, podendo ser escrito como

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= -\tilde{x}_i(r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}\tilde{x}_j) \quad i=1,2 \\ \tilde{u}_3 &= -\tilde{x}_3(-r_3 + a_{31}\tilde{x}_1 + a_{32}\tilde{x}_2) \end{aligned} \quad (4)$$

Definindo

$$y_i = x_i - \tilde{x}_i \quad (5)$$

Como o desvio da trajetória do sistema (2) da trajetória desejada, e admitindo (3)-(5), chegamos à equação em desvios (6):

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= r_i y_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}(y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j) + u_i \quad i=1,2 \\ \dot{y}_3 &= -r_3 y_3 + a_{31}(x_1 x_3 - \tilde{x}_1 \tilde{x}_3) + a_{32}(x_2 x_3 - \tilde{x}_2 \tilde{x}_3) + u_3 \end{aligned} \quad (6)$$

Para encontrar o vetor de controle u podemos formular o seguinte problema do controle ótimo: encontrar o controle ótimo u que transfere o sistema (6) de qualquer estado inicial ao ponto final

$$y(\infty) = 0 \quad (7)$$

minimizando o seguinte funcional:

$$\tilde{J} = \int_0^{\infty} (y^T \tilde{Q} y + u^T R u) dt \quad (8)$$

onde $y = \begin{bmatrix} x_1 - \tilde{x}_1 \\ x_2 - \tilde{x}_2 \\ x_3 - \tilde{x}_3 \end{bmatrix}$ e a matriz Q é semidefinida positiva.

O sistema Lotka-Volterra com desvios (6) também pode ser reescrito na forma:

$$\dot{y} = Ay + G(y, \tilde{x})y + u \quad (9)$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix} \quad G = [G_1 \quad G_2 \quad G_3]$$

sendo

$$G_1 = \begin{bmatrix} -a_{11}(y_1 + \tilde{x}_1) - a_{12}y_2 - a_{13}y_3 \\ -a_{21}y_2 \\ -a_{31}y_3 \end{bmatrix}$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} -a_{12}\tilde{x}_1 \\ -a_{22}(y_2 + \tilde{x}_2) - a_{21}\tilde{x}_1 - a_{23}y_3 \\ -a_{32}y_3 \end{bmatrix}$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} -a_{13}\tilde{x}_1 \\ -a_{23}\tilde{x}_2 \\ -a_{33}(y_3 + \tilde{x}_3) - a_{31}\tilde{x}_1 - a_{32}\tilde{x}_2 \end{bmatrix}$$

No trabalho de Rafikov & Balthazar [4] foi demonstrado que se existem as matrizes Q e R , definidas positivas, sendo Q simétrica, tais que a matriz

$$\tilde{Q} = Q - G^T(y, \tilde{x})P - PG(y, \tilde{x}) \quad (10)$$

seja definida positiva para a matriz G limitada, então o controle linear feedback

$$u = -R^{-1}B^T P y \quad (11)$$

é ótimo para transferir o sistema não-linear (9) de qualquer estado inicial ao estado final (7) minimizando o funcional (8). E a matriz $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é simétrica e satisfaz a seguinte equação algébrica não linear de Riccati:

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (12)$$

Aplicando este resultado para o sistema (6), foram escolhidas

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para obter através da função LQR do software MATLAB

$$P = \begin{bmatrix} 4.3166 & 0 & 0 \\ 0 & 4.3166 & 0 \\ 0 & 0 & 2.3166 \end{bmatrix}$$

Assim, a função de controle (11) para este sistema tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_1 &= -4.3166(x_1 - \tilde{x}_1) \\ u_2 &= -4.3166(x_2 - \tilde{x}_2) \\ u_3 &= -2.3166(x_3 - \tilde{x}_3) \end{aligned} \quad (13)$$

As trajetórias do sistema controlado (2) com controle ótimo linear (13) estão na Figura 3. As simulações foram realizadas com condições iniciais (10,20,1) e o ponto de equilíbrio escolhido foi (8,10,4).

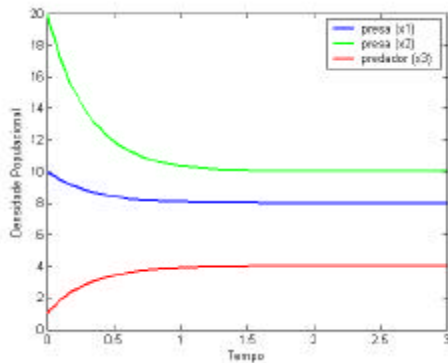


Figura 3. Trajetórias do sistema Lotka-Volterra com controle ótimo linear

A escolha da matriz Q é feita tendo em vista a estabilidade do sistema. A alteração da matriz Q para valores menores, neste caso, (mesmo resultando em valores menores para o funcional) influi na dinâmica do sistema controlado.

Através da Figura 4, pode-se verificar que os valores da função permanecem positivos, isto significa que a matriz \tilde{Q} é definida positiva, o que confirma o controle ser ótimo.

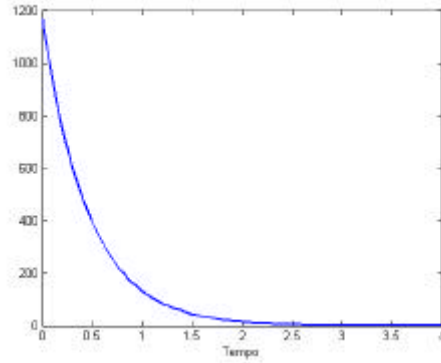


Figura 4. Valores da função $y^T \tilde{Q} y$

3. Controle não-linear feedback do sistema de duas presas e um predador

No trabalho El-Gohary e Yassen [2] foi considerado o problema do controle ótimo do sistema Lotka-Volterra através do controle não-linear feedback. Aplicando a metodologia deste trabalho para sistema de duas presas e um predador pode ser formulado o seguinte problema do controle ótimo: encontrar o controle ótimo u que transfere o sistema (6) de qualquer estado inicial ao ponto final (7) minimizando o seguinte funcional:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^3 \{K_i y_i^2 + \frac{1}{K_i} [u_i + r_i y_i + \sum_{j=1}^3 a_{ij} (y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j)]^2\} dt \quad (14)$$

As funções de controle ótimo neste caso têm a seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_i &= (K_i + r_i) y_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij} (y_i y_j + \tilde{x}_j y_i + \tilde{x}_i y_j) \quad i=1,2 \\ u_3 &= (K_3 - r_3) y_3 + a_{31} (x_1 x_3 - \tilde{x}_1 \tilde{x}_3) + a_{32} (x_2 x_3 - \tilde{x}_2 \tilde{x}_3) \end{aligned} \quad (15)$$

As trajetórias do sistema controlado com controle ótimo não-linear (15) estão na Figura 5. As simulações foram realizadas com condições

iniciais (10, 20,1) e o ponto de equilíbrio escolhido foi (8,10,4).

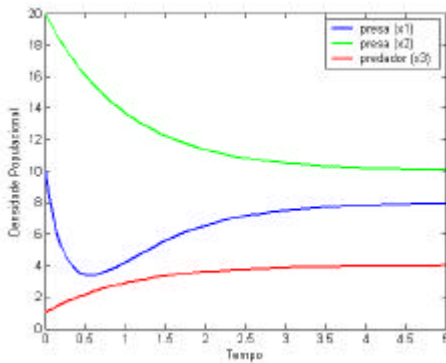


Figura 5. Trajetórias do sistema Lotka-Volterra com controle ótimo não-linear.

4. Discussão e conclusões

Comparando as trajetórias nas Figuras 3 e 4 é visto que existe uma diferença considerável no controle da primeira presa. Para o controle linear feedback a estratégia é a diminuição da população até chegar ao nível desejado da população da primeira presa. No controle não-linear a população da primeira presa no início cai até um valor menor do nível desejado, e logo depois a população da primeira presa começa a crescer aproximando-se do nível desejado. Por outro lado, as simulações feitas mostraram que o valor do funcional para o controle linear foi de 2160,6. E o controle não-linear proposto por El-Gohary & Yassen [2] apresentou um valor de 225,5. Isto ainda não significa que o controle não-linear é melhor para controle de populações neste caso. A escolha do tipo de controle depende da natureza do problema em consideração. Por exemplo, a interpretação do controle não-linear (15) para o controle de pragas leva a um resultado contraditório, ou seja, o controle ótimo para a primeira praga inicialmente diminui a população, mas logo exige a introdução deste tipo de pragas. Isto contradiz ao conceito do controle de pragas. Então, neste caso o controle linear é melhor.

5. Referências

- [1] R. BELLMAN, “*Dynamic Programming*”. Princeton, New Jersey, 1957.
- [2] A. EL-GOHARY, M. Yassen, Optimal control and synchronization of Lotka-Volterra model. *Chaos, Solitons & Fractals*, p. 2087-2093, 2001.
- [3] M. GILPIN, Spiral chaos in a predator – prey model. *American Naturalist*, 113, 1979, p. 306-308.
- [4] M. RAFIKOV, J. Balthazar. Síntese do controle linear feedback para sistemas que

exibem caos. In: III CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA, CONTROLE E APLICAÇÕES, 2004, Ilha solteira. Anais...SBMAC, p. 619-633, 2004.

- [5] R. VANCE, Predation and resource partitioning in one predator – two prey, model community. *American Naturalist*, 1978, p. 797-813. *An Evolution*, 13, 1998, p.325-329.