Aplicação de um Método Primal-Dual de Pontos Interiores, do Tipo Previsor-Corretor, em Problemas de Despacho Econômico

Antonio R. Balbo(1) **Márcio A. Silva Souza(2)** **Edméa C. Baptista(1)**
(1) Departamento de Matemática – FC – Unesp
(2) Aluno de Pós-Graduação em Matemática com Ênfase
a Aplicação de Recursos Computacionais
Av: Eng. Luís Edmundo C. Coube, s/n, Vargem Limpa
17033-360, Bauru, SP
e-mail: arbalbo@fc.unesp.br, baptista@fc.unesp.br, mass20@fc.unesp.br

1 - INTRODUÇÃO

Desde sua introdução em 1984, o algoritmo de transformação projetiva de Karmarkar [8] transformou-se em um notável método de ponto interior para resolver problemas de programação linear. Este trabalho pioneiro provocou uma agitação nas atividades de pesquisas nesta área.

Entre todos os variantes relatados do algoritmo original de Karmarkar, o primeiro procedimento que atraiu a atenção dos pesquisadores foi aquele que utilizava uma transformação afim simples para substituir a transformação projetiva original de Karmarkar, a qual era muito complexa e permitir que se trabalhasse no problema de programação linear em sua forma original, ou seja, em sua forma padrão. O algoritmo afim foi apresentado primeiramente por Dikin [3], um matemático soviético, em 1967. Mais tarde, em 1985, o trabalho era independentemente redescoberto por Barnes e por Vanderbei, Meketon, e Freedman [20]. Estes propuseram usar o algoritmo Primal – Afim para resolver os problemas de Programação Linear, na forma padrão e na prova estabelecida da convergência do algoritmo. Um algoritmo similar, denominado de algoritmo Dual – Afim, foi projetado e executado por Adler, Karmarkar, Resende e Veiga [1] para resolver problemas de Programação Linear na forma de desigualdade. Comparado à transformação projetiva, relativamente incômoda, a implementação do algoritmo Primal – Afim e Dual – Afim era mais simples por ter relação direta com os problemas de programação linear. Estes dois algoritmos, quando aplicados em problemas de grande dimensão, exibiram resultados promissores, embora a prova teórica da complexidade de tempo polinomial não foi obtida com a transformação afim utilizada. O trabalho de Megiddo e Shub [13] indicou que a trajetória que conduz à solução ótima fornecida pelos algoritmos afins depende da solução inicial. Uma má solução inicial, que está perto de um vértice do domínio viável, poderá resultar em uma investigação que percorre todos os vértices do problema.

Não obstante, a complexidade de tempo polinomial dos algoritmos Primal – Afim e Dual – Afim pode ser reestabelecida incorporando uma função barreira logarítmica ao PPL original a qual visava solucionar o problema apontado por Megiddo, ou seja, impedir que uma solução interior ficasse "presa" à fronteira do problema (possivelmente um vértice) e que possibilitou a prova de complexidade dos métodos. Nesta classe de métodos podem-se citar os métodos de pontos interiores que usam a função objetivo penalizada pela função barreira logarítmica, propostos entre outros por Megiddo, Renegar, Vaidya e Ye em [12], [16], [19] e [21], bem como, os métodos de trajetória central, propostos entre outros por Gonzaga em [5] e [6], e Monteiro e Adler em [14]. Estes últimos iniciavam a estratégia primal-dual de resolução dos PPL's.

Ao longo desta direção, um terceiro variante, o assim chamado algoritmo Primal – Dual de pontos interiores, foi apresentado e analisado por Monteiro, Adler e Resende [15] e também por Kojima, Mizuno, e Yoshise [10], em 1989. A demonstração teórica da complexidade de tempo polinomial foi feita com sucesso pelos autores citados em [15] e [10]. Estes algoritmos exploram uma função potencial primal-dual variante da função barreira logarítmica citada, denominada de função potencial.

Os métodos inseridos na metodologia primal-dual de pontos interiores, principalmente aqueles propostos em [10] e [14], amplamente investigados em [4], tem sido explorados nesta última década para solucionar, com eficiência, problemas de programação matemática linear, não-linear e inteira. Na área de Engenharia Elétrica, o problema de minimização dos custos dos combustíveis empregados na geração termoelétrica de energia denominado de Problema de Despacho Econômico (DE), pode ser numericamente solucionado através do Método Primal-Dual citado. De acordo com [7] o DE é definido como sendo um processo de alocação ótima da demanda de energia elétrica entre as unidades geradoras disponíveis, de tal forma que, as restrições operacionais sejam satisfeitas e que o custo de geração seja mínimo. A partir do uso do Critério dos Custos Incrementais Iguais, definido em [18], tem-se a equivalência do (PDE) com um problema de minimização de funcionais quadráticos, com restrições lineares de igualdade e variáveis canalizadas, quando desconsideram-se pontos de válvula.

O modelo geral de otimização para o Despacho Econômico Clássico, o qual é definido sem se considerar pontos de válvula, é apresentado por:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \mathrm{F_e} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} F_{ePVI} = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i \\ &\text{Sujeito a} \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} P_i = P_D + P_L \qquad \text{(PDE)} \\ &\qquad\qquad P_i^{Min} \le P_i \le P_i^{Max} \end{aligned}$$

onde:

F_e : é a função custo total de geração do DE;

$F_e\ F_{e_{PVI}}$: representa os custos de cada unidade geradora *i,* sem considerar o efeito do ponto de válvula;

$a_i,\ b_i\ e\ c_i$: são os coeficientes da função custo;

$P_i's$: correspondem às potências nas quais as unidades geradoras devem operar;
P_D: é o valor da demanda de energia;
P_L: representa as perdas na transmissão;
P_i^{Min} e P_i^{Max}: são, respectivamente, os limites operacionais inferiores e superiores de saída das unidades de geração termoelétrica.

Neste trabalho faz-se uma aplicação do método primal-dual de pontos interiores, utilizando-se da estratégia do tipo previsor-corretor, encontrada em [11] e [23], investigando-se a teoria do mesmo, seu esquema iterativo e sua implementação computacional, para a determinação de direções de busca e de soluções aproximadas do Problema de Programação Quadrático definido em (PDE). As atenções serão focalizadas nos três elementos básicos de um processo iterativo, a saber: como começar; como sintetizar uma boa direção de busca e como parar um algoritmo iterativo. A análise é feita explorando-se as condições de Karush-Kuhn-Tucker e de primeira e segunda ordem de Taylor, para a determinação de direções de busca, soluções aproximadas e critérios de parada do método citado. Apresentam-se aplicações deste método em problemas práticos simples, desta natureza, encontrados na Engenharia Elétrica, em especial ao (PDE), visto em [9] e [17]. Testa-se uma implementação computacional à determinação de soluções aproximadas de (PDE), comparando-se estas com resultados já obtidos e publicados em [9] e [17]. Esta investigação comparativa demonstra a competitividade do Método Primal-Dual de Pontos Interiores, do tipo previsor-corretor, com os algoritmos, Genético e Genético Co-evolutivo, bem como, o Genético Atávico Híbrido, utilizados, respectivamente, em [17] e [9].

2 - A definição do Problema de Programação Quadrática (PPQ)

O problema de minimização de funções quadráticas, com restrições de igualdade e variáveis canalizadas é expresso de maneira geral por:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ &\text{Sujeito a} \quad Ax = b \\ &\qquad l \le x \le u \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $A \in R^{m\times n}$, tal que posto A é n, $b \in R^m$, $x, c, u \in R^n$ e $Q \in R^{nxn}$ é uma matriz diagonal.

O problema (2.1) é equivalente a:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \frac{1}{2}x^TQx + c^Tx \\ &\text{Sujeito a} \quad Ax = b \\ &\qquad x + z = u \quad ; \quad z \ge 0 \\ &\qquad x - r = l \quad ; \quad r \ge 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

O PPQ Dual de (2.2) é expresso por:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar} \quad -\frac{1}{2}x^TQx + b^Tw - u^Ty + l^Ts \\ &\text{Sujeito a} \quad -Qx + A^Tw + s - y = c \\ &\qquad s \ge 0; \\ &\qquad y \ge 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

onde $w \in R^m$ e $s, y \in R^n$.

Para um escalar $\mu > 0$, pode-se incorporar ao (PPL) uma função barreira logarítmica resultando no seguinte problema de otimização não-linear:

$$\begin{aligned} &Min \quad F_\mu(x) = c^Tx - \mu\sum_{j=1}^{n}\ln x_j - \mu\sum_{j=1}^{n}\ln z_j \\ &Sujeito\ a \quad Ax = b; \\ &\qquad x + z = u;\ \ z \ge 0; \\ &\qquad x - r = l; \quad r \ge 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

O problema dual de (PPL) é:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \ -\frac{1}{2}x^TQx + b^Tw - u^Ty + l^Ts - \mu\sum_{j=1}^{n}\ln s_j - \mu\sum_{j=1}^{n}\ln y_j \\ &\text{Sujeito a} \ -Qx + A^Tw + s - y = c \\ &\qquad s \ge 0; \\ &\qquad y \ge 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

As condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para os problemas (2.4) e (2.5) são:

$$-Qx + A^Tw + s - y = c \tag{2.6a}$$
$$Ax = b \tag{2.6b}$$
$$x + z = u \tag{2.6c}$$
$$x - r = l \tag{2.6d}$$
$$ZYe - \mu e = 0 \tag{2.6e}$$
$$BSe - \mu e = 0 \tag{2.6f}$$

onde *R, Z, S* e *W* são matrizes diagonais, $e = (1, \ldots, 1)^T$ e μ a métrica dual ou parâmetro de ajuste à curva definida pela trajetória central.

A fim de simplificar notações, o conjunto solução, Ω^0, para os problemas (2.2) e (2.3) será denotado aqui como:

$$\Omega^0 = \left\{ \begin{array}{l} (x, w, z, r, y, s) / -Qx + A^Tw + s - y = c, \\ Ax = b,\ x + z = u, x - r = l\ \ (z, r, y, s) > 0 \end{array} \right\}$$

e a função *F*, dependente das variáveis *x*, *w*, *z*, *r*, *y* e *s* por:

$$F(x, w, z, r, y, s) = \begin{bmatrix} Ax - b \\ -Qx + A^Tw + s - y - c \\ x + z - u \\ x - r - l \\ ZYe - \mu e \\ S\,\text{Re} - \mu e \end{bmatrix}.$$

Consideram-se as variáveis do problema definidas a partir de uma iteração k por:

$$x = x^k + d_x^k;$$
$$w = w^k + d_w^k;$$
$$z = z^k + d_z^k;$$
$$r = r^k + d_r^k$$
$$y = y^k + d_y^k;$$
$$s = s^k + d_s^k.$$

Usando a aproximação linear da Série de Taylor para avaliar $F(x, w, z, r, y, s)$, obtêm-se a seguinte aproximação:

$$F(x, w, z, r, y, s) = F(h^{(k)}) + J(h^{(k)})d^{(k)} \qquad (2.7a)$$

onde

$h^{(k)} = (x^k, w^k, z^k, r^k, y^k, s^k)^T$, $d^{(k)} = (d_x^k, d_w^k, d_z^k, d_r^k, d_y^k, d_s^k)^T$ e $J(h^{(k)})$ é a matriz Jacobiana, cujo $(i,\ j)$-ésimo elemento é dado por:

$$\left[\frac{\partial F_i(h)}{\partial h_j}\right]_{h=h^k}.$$

Tem-se ainda que, para a resolução aproximada de (2.7a), a seguinte condição

$$F(h) = \begin{bmatrix} Ax-b \\ -Qx + A^T w + s - y - c \\ x+z-u \\ x-r-l \\ ZYe-\mu e \\ S\,\mathrm{Re}-\mu e \end{bmatrix} = 0 \qquad (2.7b)$$

2.1 - Direções de busca

As expressões (2.7a) e (2.7b) serão de interesse para redefinir as direções de busca do método investigado, definidas a seguir.

2.1.1 - Direções de busca – Tipo Previsor

Supondo em um passo k que as condições de otimalidade (2.6) satisfaçam à viabilidade primal e dual, então, a definição do novo ponto, na iteração k+1, depende diretamente das direções de movimento e comprimento de passo nesta direção. Sem se preocupar, em uma primeira análise, com o comprimento do passo, considera-se, na iteração $k+1$, o novo ponto h^{k+1} definido por:

$$h^{k+1} = \begin{pmatrix} x^{k+1} \\ w^{k+1} \\ z^{k+1} \\ r^{k+1} \\ y^{k+1} \\ s^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^k + d_x^k \\ w^k + d_w^k \\ z^k + d_z^k \\ r^k + d_r^k \\ y^k + d_y^k \\ s^k + d_s^k \end{pmatrix}. \qquad (2.8)$$

Assim, necessita-se determinar a direção $d^{(k)} = (d_x^k, d_w^k, d_z^k, d_r^k, d_y^k, d_s^k)^T$ para obter-se o novo ponto h^{k+1}.

Seguindo-se os passos do Método de Newton e considerando (2.7a) e (2.7b), explicitamente, a direção de movimento $d^{(k)}$ pode ser obtida por:

$$\begin{pmatrix} d_x^k \\ d_w^k \\ d_z^k \\ d_r^k \\ d_y^k \\ d_s^k \end{pmatrix} = -J^{-1}(h^{(k)})F(h^{(k)}). \qquad (2.9)$$

Mas não é usual, na prática, determinarmos $d^{(k)}$ através de (2.8), pois a inversão de $J(h^{(k)})$ é inviável computacionalmente. Assim, determina-se $d^{(k)}$ resolvendo-se o seguinte sistema linear:

$$J(h^{(k)})d^{(k)} = -F(h^{(k)}); \qquad (2.10)$$

É imediato que:

$$J(h^{(k)}) = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q & A^T & 0 & 0 & -I & I \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 & R \end{pmatrix} \qquad (2.11)$$

Considerando-se (2.11), então, reescreve-se (2.10) da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q & A^T & 0 & 0 & -I & I \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_x^k \\ d_w^k \\ d_z^k \\ d_r^k \\ d_y^k \\ d_s^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^k \\ u^k \\ f^k \\ o^k \\ q^k \\ v^k \end{pmatrix} \qquad (2.12a)$$

onde, $t^k = b - Ax^k$; $u^k = Qx^k + c - A^T w^k - s^k + y^k$;

$f^k = u - x^k - z^k$; $\quad o^k = l - x^k + r^k$

$q^k = \mu^k e - Z_k Y_k e$; $v^k = \mu^k e - R_k S_k e$. $\qquad$ (2.12b)

A maneira como foram definidos os resíduos t^k, u^k, f^k, o^k, q^k, v^k em (2.12b) é que evidencia, no algoritmo a ser proposto, a diferenciação entre o passo previsor e corretor do método.

As direções a serem determinadas a seguir, no passo previsor, utilizam os resíduos definidos em (2.12b).

Para determinar as direções no passo previsor não é usual resolver o sistema linear (2.12) devido à estrutura esparsa e de blocos da matriz. Assim, calcula-se d_x^k, d_w^k, d_z^k, d_r^k, d_y^k e d_s^k, separadamente, através das seguintes equações:

$$Ad_x^k = t^k \qquad (2.13a)$$

$$-Qd_x^k + A^T d_w^k + d_s^k - d_y^k = u^k \qquad (2.13b)$$

$$d_x^k + d_z^k = \mathrm{f}^k \qquad (2.13c)$$

$$d_x^k - d_r^k = \mathrm{o}^k \qquad (2.13d)$$

$$Y_k d_z^k + Z_k d_y^k = q^k \qquad (2.13e)$$

$$S_k d_b^k + R_k d_s^k = v^k \qquad (2.13f)$$

Desde que, em uma iteração k, a viabilidade depende de $x^k + z^k = u$ e de $x^k - r^k = l$, então para as novas soluções x^{k+1}, z^{k+1} e r^{k+1} estas condições devem ser garantidas.

Considerando-se $x^{k+1} = x^k + d_x^k$, $z^{k+1} = z^k + d_z^k$ e $r^{k+1} = r^k + d_r^k$, chega-se à condição:

$$d_x^k + d_z^k = 0.$$

Portanto,

$$d_z^k = -d_x^k \qquad (2.14a)$$

Analogamente tem-se:

$$d_r^k = d_x^k \qquad (2.14b)$$

Agora, isola-se d_y^k e d_s^k de (2.13e) e (2.13f), respectivamente tem-se:

$$d_y^k = Z_k^{-1}(q^k - Y_k d_z^k) \qquad (2.14c)$$

$$d_s^k = R_k^{-1}(v^k - S_k d_r^k) \qquad (2.14d)$$

Combinando-se os resultados encontrados em (2.14a), (2.14b), (2.14c) e (2.14d) com aqueles vistos em (2.13), são determinados às direções de movimento d_w^k e d_x^k para o método.

De (2.13b) tem-se:

$$-Qd_x^k + A^T d_w^k + R_k^{-1}(v^k - S_k d_r^k) - Z_k^{-1}(q^k - Y_k d_z^k) = u^k \Rightarrow$$

$$-Qd_x^k + A^T d_w^k + \underbrace{R_k^{-1}v^k}_{p^k} - R_k^{-1}S_k d_r^k - Z_k^{-1}q^k + Z_k^{-1}Y_k d_z^k = u^k \Rightarrow$$

$$A^T d_w^k = u^k - p^k + R_k^{-1}S_k d_x^k + Z_k^{-1}Y_k d_x^k + Qd_x^k + Z_k^{-1}q^k \Rightarrow$$

$$A^T d_w^k = u^k - p^k + Z_k^{-1}q^k + (R_k^{-1}S_k + Z_k^{-1}Y_k + Q)d_x^k \quad (2.14e)$$

Considerando-se:

$$\theta = (R_k^{-1}S_k + Z_k^{-1}Y_k + Q)^{-1} \qquad (2.14f)$$

Multiplicando $A\theta$ em ambos os lados da (2.14e), tem-se:

$$A\theta A^T d_w^k = A\theta(-p^k + Z_k^{-1}q^k + u^k) + A\theta\theta^{-1}d_x^k \Rightarrow$$

$$A\theta A^T d_w^k = A\theta(-p^k + Z_k^{-1}q^k + u^k) + \underbrace{Ad_x^k}_{t^k} \Rightarrow$$

$$d_w^k = (A\theta A^T)^{-1}\left[A\theta(-p^k + Z_k^{-1}q^k + u^k) + t^k\right] \quad (2.14g)$$

Reconsiderando-se (2.14e) tem-se:

$$A^T d_w^k + p^k - R_k^{-1}S_k d_x^k - Z_k^{-1}Y_k d_x^k - Qd_x^k - Z_k^{-1}q^k = u^k \Rightarrow$$

$$A^T d_w^k + p^k - Z_k^{-1}q^k - (R_k^{-1}S_k + Z_k^{-1}Y_k + Q)d_x^k = u^k.$$

Partindo-se de (2.14f):

$$-\theta^{-1}d_x^k = u^k - A^T d_w^k - p^k + Z_k^{-1}q^k \Rightarrow$$

$$\theta^{-1}d_x^k = A^T d_w^k + p^k - Z_k^{-1}q^k - u^k \Rightarrow$$

$$d_x^k = \theta(A^T d_w^k + p^k - Z_k^{-1}q^k - u^k). \quad (2.14h)$$

Resumindo-se os resultados encontrados em (2.14), têm-se as seguintes direções de busca do passo previsor:

$$\begin{aligned}
d_w^k &= (A\theta A^T)^{-1}\left[A\theta(-p^k + Z_k^{-1}q^k + u^k) + t^k\right] \\
d_x^k &= \theta(A^T d_w^k + p^k - Z_k^{-1}q^k - u^k) \\
d_z^k &= -d_x^k \\
d_y^k &= Z_k^{-1}(q^k - Y_k d_z^k) \\
d_y^k &= Z_k^{-1}(q^k - Y_k d_z^k)
\end{aligned} \qquad (2.14)$$

2.1.2 - Direções de Busca -Tipo Corretor

Analogamente ao realizado em 2.1.1, determina-se a direção de busca do passo corretor, denominada de $\tilde{d}^{(k)}$, resolvendo-se o seguinte sistema linear:

$$J(h^{(k)})\tilde{d}^{(k)} = -\tilde{F}(h^{(k)}); \qquad (2.15)$$

onde, $F(h^{(k)})$ é obtido considerando-se aproximações de 2ª ordem em (2.7a), consideradas, a partir do passo previsor, tal que (2.15) é equivalente a:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Q & A^T & 0 & 0 & -I & I \\ I & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y & 0 & Z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 & R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}_x^k \\ \tilde{d}_w^k \\ \tilde{d}_z^k \\ \tilde{d}_r^k \\ \tilde{d}_y^k \\ \tilde{d}_s^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^k \\ u^k \\ f^k \\ o^k \\ \tilde{q}^k \\ \tilde{v}^k \end{pmatrix}; \qquad (2.16)$$

onde:

$$t^k = b - Ax^k; \qquad u^k = Qx^k + c - A^T w^k - s^k + y^k;$$

$$f^k = u - x^k - z^k; \qquad o^k = l - x^k + r^k;$$

$$\tilde{q}^k = \mu^k e - Z_k Y_k e - D_z^k D_y^k e;$$

$$\tilde{v}^k = \mu^k e - R_k S_k e - D_x^k D_s^k e \qquad (2.17)$$

As matrizes D_x^k, D_z^k, D_y^k e D_s^k são matrizes diagonais, cujos elementos diagonais são $(d_x^k)_i$, $(d_z^k)_i$, $(d_y^k)_i$ e $(d_s^k)_i$, $i = 1, \cdots, n$,respectivamente.

Note que, no passo corretor, as direções d_x^k, d_z^k, d_y^k e d_s^k definidas no passo previsor são utilizadas para a redefinição dos resíduos $\tilde{q}^k$ e $\tilde{v}^k$ em (2.17).

A partir de (2.16) e (2.17) calculam-se $\tilde{d}_x^k$, $\tilde{d}_w^k$, $\tilde{d}_z^k$, $\tilde{d}_r^k$, $\tilde{d}_y^k$ e $\tilde{d}_s^k$ através das seguintes equações:

$$A\tilde{d}_x^k = t^k; \qquad (2.18a)$$

$$-Q\tilde{d}_x^k + A^T\tilde{d}_w^k + \tilde{d}_s^k - \tilde{d}_y^k = u^k; \qquad (2.18b)$$

$$\tilde{d}_x^k + \tilde{d}_z^k = \mathrm{f}^k; \qquad (2.18c)$$

$$\tilde{d}_x^k - \tilde{d}_r^k = \mathrm{o}^k; \qquad (2.18d)$$

$$Y_k\tilde{d}_z^k + Z_k\tilde{d}_y^k = \tilde{q}^k; \qquad (2.18e)$$

$$S_k\tilde{d}_r^k + R_k\tilde{d}_s^k = v^k. \qquad (2.18f)$$

Seguindo os mesmos passos feitos para as direções do passo previsor, chega-se aos seguintes resultados:

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_w^k &= (A\theta A^T)^{-1}\left[A\theta(-p^k + Z_k^{-1}\tilde{q}^k + u^k) + t^k\right]; \\
\tilde{d}_x^k &= \theta(A^T\tilde{d}_w^k + p^k - Z_k^{-1}\tilde{q}^k - u^k); \\
\tilde{d}_z^k &= -\tilde{d}_x^k; \\
\tilde{d}_r^k &= \tilde{d}_x^k; \\
\tilde{d}_y^k &= Z_k^{-1}(\tilde{q}^k - Y_k\tilde{d}_z^k); \\
\tilde{d}_s^k &= R_k^{-1}(\tilde{v}^k - S_k\tilde{d}_r^k).
\end{aligned} \qquad (2.18)$$

2.2 – Comprimento do passo

Uma vez que as direções de busca do tipo corretor são obtidas em (2.18), tem-se a condição de se mover para um novo ponto $(x^{k+1}, w^{k+1}, z^{k+1}, r^{k+1}, y^{k+1}, s^{k+1})$ garantindo-se que $s^{k+1} > 0$, $z^{k+1} > 0$, $y^{k+1} > 0$ e $r^{k+1} > 0$. A restrição de não-negatividade destas variáveis requer um controle do passo a ser dado em cada direção obtida, assim, consideram-se as variáveis definidas no passo corretor por:

$$x^{k+1} = x^k + \tilde{\beta}_P d_x^k; \qquad (2.19a)$$

$$w^{k+1} = w^k + \tilde{\beta}_D d_w^k; \quad (2.19b)$$
$$s^{k+1} = s^k + \tilde{\beta}_D d_s^k; \quad (2.19c)$$
$$r^{k+1} = r^k + \tilde{\beta}_P d_r^k; \quad (2.19d)$$
$$y^{k+1} = y^k + \tilde{\beta}_D d_y^k; \quad (2.19e)$$
$$z^{k+1} = z^k + \tilde{\beta}_P d_z^k. \quad (2.19f)$$

onde:

$$\tilde{\beta}_P = Min\left\{1, -\frac{\alpha z_i^k}{\tilde{d}_{z_i}^k}, -\frac{\alpha r_i^k}{\tilde{d}_{r_i}^k} \text{ tal que } \tilde{d}_{z_i}^k, \tilde{d}_{r_i}^k < 0\right\} \quad (2.20a)$$

e

$$\tilde{\beta}_D = Min\left\{1, -\frac{\alpha s_i^k}{\tilde{d}_{s_i}^k}, -\frac{\alpha y_i^k}{\tilde{d}_{y_i}^k} \text{ tal que } \tilde{d}_{s_i}^k; \tilde{d}_{y_i}^k < 0\right\} \quad (2.20b)$$

onde $0 < \alpha < 1$.

2.3 – Critério de Parada

Ao contrário do método Simplex, os algoritmos de pontos interiores nunca encontram soluções exatas, para os problemas de programação linear ou quadrática. Por isso, o algoritmo precisa usar um *critério de parada* para decidir quando a iteração corrente está próxima o suficiente da solução ótima, baseando-se em [22].

Muitos algoritmos consideram uma boa solução aproximada àquela que possui os resíduos, primal, $t^k = b^k - Ax^k$, dual, $u^k = Qx^k + c - A^T w^k - s^k + y^k$ e a métrica dual μ suficientemente pequenos. Para esse fim pode-se usar medidas relativas diminuindo os problemas de escala dos dados [22]. Testes típicos para uma solução $\left(x^k, w^k, z^k, r^k, y^k, s^k\right)$ são:

$$\frac{\|t^k\|}{\|b\|+1} = \frac{\|b - Ax^k\|}{\|b\|+1} \le \varepsilon_1; \quad (2.21a)$$

$$\frac{\|u^k\|}{\|Qx^k + c\|+1} = \frac{\|Qx^k + c - A^T w^k - s^k + y^k\|}{\|Qx^k + c\|+1} \le \varepsilon_2; \quad (2.21b)$$

onde ε_1 e ε_2 são tolerâncias pré-definidas. Naturalmente outros critérios podem ser adotados em concordância com a aplicação a um problema específico. Para outros tipos de critério de parada, veja [2] e [4].

2.4 – Algoritmo Primal-Dual para Variáveis Canalizadas com Procedimento Previsor-Corretor.

Passo 1 (iniciando o algoritmo): Ajuste $k = 0$. Escolha um ponto arbitrário $(x^0; w^0; z^0, y^0, r^0, y^0, s^0) \in \Omega^0$ e escolha ε_1 e ε_2 números positivos suficientemente pequenos.

Passo 2 (Cálculos intermediários):

Passo Previsor

Calcule: $\mu_k = \dfrac{(x^k)^T s^k + (z^k)^T y^k}{n}$; $t^k = b - Ax^k$; $u^k = Qx^k + c - A^T w^k - s^k + y^k$; $f^k = u - x^k - z^k$; $o^k = l - x^k + r^k$; $q^k = \mu^k e - Z_k Y_k e$; $v^k = \mu^k e - R_k S_k e$ e $\theta = (R_k^{-1} S_k + Z_k^{-1} Y_k + Q)^{-1}$, onde S_k, Z_k, Y_k e R_k são as matrizes diagonais cujas componentes diagonais são s_i^k, z_i^k, y_i^k e r_i^k ,respectivamente.

Passo Corretor

Calcule:

$$\tilde{v}^k = \mu^k e - X_k S_k e - D_x^k D_s^k \quad \text{e}$$
$$\tilde{q}^k = \mu^k e - Z_k Y_k e - D_z^k D_y^k e.$$

Observação: para melhor desempenho e convergência do método é interessante considerar parâmetros primal e dual diferentes dados por: $\mu_k^1 = \dfrac{(r^k)^T s^k}{n}$; $\mu_k^2 = \dfrac{(z^k)^T y^k}{n}$ e fazer $\mu_k = Min\{\mu_k^1, \mu_k^2\}$, para a determinação de novas direções e soluções.

Passo 3 (Verificando a otimalidade): Se

$$\mu_k < \varepsilon_1 \quad \text{e} \quad \frac{\|u^k\|}{\|Qx^x + c\|+1} < \varepsilon_2$$

então PARE. A solução é ótima. Caso contrário vá para a etapa seguinte.

Passo 4 (direções de translação - previsor): Determine as direções de busca d_x^k, d_w^k, d_z^k, d_r^k, d_y^k e d_s^k do passo previsor através de (2.14).

Passo 5 (direções de translação - corretor): Calcule as direções de busca do passo corretor através de (2.18).

Passo 6 (Encontrando o comprimento do passo): Calcule o comprimento do passo primal $\tilde{\beta}_P^k$ e dual $\tilde{\beta}_D^k$ através de (2.20a) ou (2.20b), utilizando $\alpha = 0.995$.

Passo 8 (Determinando um novo ponto):

$$x^{k+1} = x^k + \tilde{\beta}_P d_x^k;$$
$$w^{k+1} = w^k + \tilde{\beta}_D d_w^k;$$
$$s^{k+1} = s^k + \tilde{\beta}_D d_s^k;$$
$$y^{k+1} = y^k + \tilde{\beta}_D d_y^k;$$
$$z^{k+1} = z^k + \tilde{\beta}_P d_z^k;$$
$$r^{k+1} = r^k + \tilde{\beta}_P d_r^k.$$

Faça $k \leftarrow k+1$ e volte para o Passo 2.

3 - Aplicação ao Modelo de Despacho Econômico

O modelo geral de otimização para o Despacho Econômico Clássico, o qual é de definido sem se considerar pontos de válvula, equivalentemente ao (PDE) visto, é apresentado por:

$$\text{Minimizar } \; F_e = \sum_{i=1}^{n} F_{ePVI} = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i$$
$$\text{Sujeito a } \; \sum_{i=1}^{n} P_i = P_D + P_L \qquad (3.1)$$
$$P_i^{Min} \le P_i \le P_i^{Max}$$

Para o problema (3.1) tem-se que: F_e é a função custo total de geração do DE com, F_{ePVI}, representando os custos de cada unidade geradora i, sem considerar o efeito do ponto de válvula; a_i, b_i, e c_i são os coeficientes característicos da função custo; $P_i^{'}s$ correspondem as potencias nas quais as unidades geradoras devem operar; P_D *é* o valor da demanda de energia; P_L representa as perdas na transmissão; P_i^{Min} e P_i^{Max} são, respectivamente, os limites operacionais inferiores e superiores de saída das unidades de geração termoelétrica.

Uma implementação do algoritmo visto, elaborada em pascal 7.0, foi aplicada para o problema definido na tabela 1, encontrado em [9] e [17]:

Gerador	Pmín (MW)	Pmáx (MW)	a	b	c
1	0	680	0.00028	8.1	550
2	0	360	0.00056	8.1	309
3	0	360	0.00056	8.1	307
4	60	180	0.00324	7.74	240
5	60	180	0.00324	7.74	240
6	60	180	0.00324	7.74	240
7	60	180	0.00324	7.74	240
8	60	180	0.00324	7.74	240
9	60	180	0.00324	7.74	240
10	40	120	0.00284	8.6	126
11	40	120	0.00284	8.6	126
12	55	120	0.00284	8.6	126
13	55	120	0.00284	8.6	126

Tabela 1 – Dados de um Problema de Despacho Econômico

3.1 – Adaptação do Problema de Despacho Econômico ao algoritmo visto.

Para o exemplo de Problema de Despacho Econômico visto na tabela 1 são feitas as seguintes definições, no sentido de adaptar este problema ao algoritmo visto na seção anterior, desenvolvido para Problemas de Programação Quadrática, com restrições lineares de igualdade e variáveis canalizadas:

$$Q_{i,i} = 2a_i \text{ e } Q_{i,j} = 0, \text{ se } i \ne j$$
$$P_i = x_i\,;\; P_i^{MIn} = l_i \text{ e } P_i^{Max} = u_i$$
$$A_{i,i} = 1 \text{ e } A_{i,j} = 0, \text{ se } i \ne j \;; \text{ onde i, j = 1, ..., n;}$$
$$b = P_D + P_L\,.$$

Consideram-se, ainda, as seguintes soluções para inicialização do método: $b = P_D + P_L = 2520$, onde $P_D = 2520$ é o valor da demanda e $P_L = 0$, ou seja, não há perda na transmissão;

$$x^0 = (645{,}340{,}320{,}120{,}160{,}150{,}170{,}160{,}165{,}70{,}60{,}70{,}90)$$
$$w^0 = (0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0)\;;$$
$$y^0 = (30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30,30).$$

A aplicação do algoritmo visto ao problema definido nesta seção determinou os resultados, visto na tabela 2. Nesta tabela apresentam-se, para comparação, alem das soluções obtidas pelo Método Primal-Dual com procedimento Previsor-Corretor (PDPC), aquelas encontradas pelos métodos, do Gradiente (MG) e Algoritmo Genético Híbrido (AGH) e Algoritmo Genético Co-Evolutivo (Co-Evolutivo). As soluções dadas pro MG , AGH e Co-Evolutivo são encontradas em [17]. Optou-se por não colocar-se nesta tabela os tempos de CPU, pois estes são insignificantes para os métodos abordados.

Resultados	MG	AGH	Co-evolutivo	PDPC
P_1 (MW)	643,8791	651,1451	735,626	680,0000
P_2 (MW)	330,1394	319,9820	337,4955	333,6533
P_3 (MW)	309,5107	320,4637	292,6257	314,0267
P_4 (MW)	124,5300	137,7761	146,7135	117,7600
P_5 (MW)	145,1631	156,6884	177,3462	157,0133
P_6 (MW)	150,7257	147,0077	131,5521	147,2000
P_7 (MW)	160,1543	159,1650	154,1975	166,8267
P_8 (MW)	172,1578	145,3784	159,5506	157,0133
P_9 (MW)	176,9499	151,5512	167,3398	161,9200
P_{10} (MW)	62,5544	82,2596	60,67783	68,69333
P_{11} (MW)	92,8891	86,3206	74,68194	58,88000
P_{12} (MW)	62,6343	82,8938	56,53708	68,69333
P_{13} (MW)	88,7153	79,3682	25,65585	88,32000
ΣP_i (MW)	2.520,00	2.520,00	2.520,00	2.250,00

TABELA 2 – Resultados obtidos

Resultados	Função Objetivo
MG	24.703,32
AGH	24.111,69
Co-Evolutivo	24.072,03
PDPC	24.093,35

TABELA 3 – Valores da Função Objetivo

Apresentam-se, na tabela 3, os valores da Função Objetivo obtidos através da minimização feita pelos métodos citados. Considerando-se ainda os resultados encontrados em [9], através do Algoritmo Genético Atávico Híbrido (AGAH), encontra-se como valor ótimo da Função Objetivo, para o PDE definido pela Tabela 1, o valor de 24.052,34, o qual é o melhor resultado obtido comparando-se com aqueles apresentados na Tabela 3.

4 – Conclusão

Neste trabalho fez-se uma aplicação da implementação computacional de um Método Primal-Dual de Pontos Interiores do tipo Previsor-Corretor, elaborada em pascal 7.0, em Problema de Despacho Econômico, encontrados na Engenharia Elétrica, os quais, no caso de não se considerar pontos de válvula, são equivalentes ao problema de minimizar funcionais quadráticos, restritos a sistemas lineares de igualdade e variáveis canalizadas.

As soluções obtidas em alguns exemplos testados foram muito próximas daquelas encontradas em [9] e [17]. Os resultados obtidos, apresentados na tabela 3, mostram a eficiência do método PDPC para a resolução de problemas de Despacho Econômico, comparados com os métodos considerados em [9] e [17], que era o objetivo deste trabalho. Isto incentiva a busca de melhoria na implementação feita para a obtenção de melhores resultados. Neste sentido, tem-se a possibilidade de explorar a inclusão de funções potenciais à função quadrática minimizada, além de procedimentos do tipo previsor-corretor, bem como, processos híbridos envolvendo o Método Primal-Dual e Algoritmos Genéticos encontrados em [9] e [17], para se investigar novos e melhores resultados.

5 - Referências

[1] I. Adler, N. Karmakar, M. Resende e G. Veiga, *An Implementation of Karmakar's algorithm for linear Programming*, Math Programming-pp. 297-335, 1989.

[2] B. Borches, J. E. Mitchel, "Using an Interior Point Method in a Branch an Bound Algorithm for Integer Programming", Technical Report 195, Mathematical Sciences, Resselaer Polytechnic Institute, Troy, NY 12180, March 1991, Revised July 7, 1992.

[3] I. I. Dikin, *Iterative solution of problems of linear and quadratic programming* (in Russian*), Doklady Akademiia Nauk USSR 174, 747-748,* Soviet Mathematics Doklady 8, 674-675, 1967.

[4] S. C. Fang e S. Puthenpura, "Linear Optimization and Extensions: Theory and Algorithms", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.

[5] C. Gonzaga, *An algoritthm for solving linear programming problems in $O(n^3L)$ operations in Progress in Mathematical Programming:* Interior-Point and Related Methods, ed. N. Megido, Springer-Verlag, New York, 1-28, 1989.

[6] C. Gonzaga, *Polynomial affine algorithms for linear programmimg,* Mathematical Programming 49, 7-21, 1990.

[7] H. H. Happ, Optimal Power Dispatch - Comprehensive Survey, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 3 Vol.96, (1977) 841-854.

[8] N. Karmakar,, *A new polynomial time algorithm for linear programming*, Combinatoria 4, 373-395, 1984.

[9] J.O. Kim, D. J. Shin, J.N. Park and C. Singh, Atavistic Genetic algorithm for economic dispatch with valve point effect, *Eletric Power Systems Research*, 62, (2002) 201-207.

[10] M. Kojima, S. Mizuno e A. Yoshise, *A primal dual - interior point method for linear programming*, it Progress in Mathematical Programming: Interior-Point and Related Methods, Ed. N. Megiddo, Springer-Verlag, New York, 29-48, 1989.

[11] I.J. Lustig, *On Implementing Mehrota's Predictor-Corretor Interior Point Method for Linear Programming*, Rutcor Research Report, Rutgers University, RRR#26-90, 1990.

[12] N. Megiddo, *On the complexity of linear programming*, in Advances in Economical Theory, ed. t Bewely, Cambridge University Press, Cambridge, 225-268, 1987.

[13] N. Megiddo e M. Shub, *Boundary behavior of interior point algorithms in linear programming,* Mathematics of Operations Research 14, 97-146, 1989.

[14] R.D.C. Monteiro e I. Adler, *Interior Path-Following Primal-Dual Algorithms. Part I: Linear Programming, Part II: Convex Quadratic Programming*, Mathematical Programming, 44, 27-66, 1989.

[15] R. C. Monteiro, I. Adler e M. C. Resende, *A polynomia-time primal-dual affine scaling algorithm for linear and convex quadratic programming and its power series extension,* Mathematics of Operations Research 15, 191-214, 1990.

[16] J. Renegar, *A polynomial-time algorithm based on Newton´s method for linear programming,* Mathematical Programming 40, 59-93 , 1988.

[17] M.M.A. Samed, "Um Algoritmo Genetico Hibrido Co-Evolutivo para Resolver Problemas de Despacho", Tese de Doutorado, UEM, Depto. de Engenharia Química, Agosto de 2004, 167 p.

[18] M.J.C Steinberg; T.H. Smith, "Economic Loading of Power Plants and Eletric Systems", MacGraw-Hill, 1943.

[19] P. M. Vaidya, *An algorithm for linear programming which requires $O(((m + n)n^2 + (m + n)^{1.5}n)L)$ arithmetic operations*, Mathematical Programming 47, 175-2001, 1990.

[20] R.J. Vanderbei, M. S. Meketon, e B. Freedman, A., *A modification of Karmarkar's linear programming algorithms,* Algorithmica 1, 395-407, 1986.

[21] Y. Ye, *An $O(n^3 L)$ potential reduction algorithm for linear programming*, Contemporary Mathematics, 114, 91-107, 1986.

[22] S. J. Wright, *Primal-Dual Interior Point Methods*, SIAM Journal, 289-304, 1997.

[23] Y.C. Wu, A.S. Debs e R.E. Marsten, *A direct nonlinear Predictor-Corrector Primal-Dual Interior Point Algorithm for Optimal Power Flows*, IEEE Transactions on Power Systems, 9, No.2, 876-883, 1994.