Comportamento Dinâmico do Eixo Rotor de Euler-Bernoulli

Antonio Carlos Lyrio Bidel,

Depto de Matemática, CCNE, UFSM,

97105-900, Santa Maria, RS

E-mail: bidel@smail.ufsm.br,

Julio Cesar Ruiz Claeyssen

Instituto de Matemática, UFRGS,

90001-000, Porto Alegre, RS

E-mail: clayssen@mat.ufrgs.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é o estudo teórico do comportamento dinâmico de um eixo rotor flexível, modelado segundo a teoria de Euler-Bernoulli, com condições de contorno genéricas e desacopladas. O estudo é feito no próprio espaço físico, ou seja, sem redução ao espaço de estado, utilizando-se uma formulação evolutiva. Para tanto, é utilizada a base dinâmica gerada pela resposta impulso ou solução fundamental. Eixos rotores flexíveis, assim como discos rígidos, suportes (mancais) e engrenagens, são componentes de sistemas rotativos os quais têm ampla aplicação na área industrial tais como, motores de combustão interna, turbo geradores, compressores centrífugos e recíprocos com a finalidade de transmitir potência, turbinas a gás e a vapor, fresadeiras, máquinas de moagem e máquinas retificadoras. Do ponto de vista prático pode-se citar as turbinas, presentes em aeronaves supersônicas com o objetivo de propulsão ou nas hidrelétricas com a finalidade de gerar energia elétrica. Mais geralmente, o termo rotor é usado para designar os componentes rotativos em turbomáquinas [12].

Considerando o eixo isotrópico, regime elástico e deslocamentos infinitesimais, do balanço de forças obtém-se as equações do movimento [1], [13]

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{U}}(t,z)+\mathbb{G}\dot{\mathbf{U}}(t,z)+\mathbb{K}\mathbf{U}(t,z)=\mathbf{f}(t,z)$$
$$\mathbf{U}(0,z)=\mathbf{U}_0(z) \text{ e } \dot{\mathbf{U}}(0,z)=\dot{\mathbf{U}}_0(z) \tag{1}$$

sujeita as condições de contorno genéricas

$$\mathbf{B}_i\mathbf{U}=\sum_{k=0}^{3}\left(\mathbf{A}_{ik}\mathbf{U}^{(k)}(t,0)+\mathbf{B}_{ik}\mathbf{U}^{(k)}(t,L)\right)= \\ =\mathbf{z}_i(t)\ i=1:4 \tag{2}$$

com $\mathbf{A}_{ik}$ e $\mathbf{B}_{ik}$ matrizes diagonais e onde os elementos das matrizes, massa, giroscópica e rigidez, dadas por

$$\mathbb{M}=\begin{bmatrix}\rho A-\rho I\frac{d^2}{dz^2} & 0\\ 0 & \rho A-\rho I\frac{d^2}{dz^2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbb{G}=\begin{bmatrix}0 & -2\rho I\Omega\frac{d^2}{dz^2}\\ 2\rho I\Omega\frac{d^2}{dz^2} & \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{K}=\begin{bmatrix}EI\frac{d^4}{dz^4} & 0\\ 0 & EI\frac{d^4}{dz^4}\end{bmatrix}$$

são operadores diferenciais espaciais atuando sobre funções que satisfazem certas condições contorno. Os parâmetros físicos considerados no problema são

- ρ - densidade volumétrica - (kg/m^3)
- A - área da seção transversal - (m^2)
- I - momento de inércia de área - (m^4)
- Ω - a velocidade de rotação do eixo - (rd/s)
- $f_x(t,z)$ e $f_y(t,z)$ - forças externas - (N)
- E - módulo de Young - (N/m^2)
- L - comprimento do eixo - (m)

Os vetores, deslocamento transversal e força externa são dados, respectivamente, por

$$\mathbf{U}(t,z)=\begin{bmatrix}u(t,z)\\ v(t,z)\end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}f_x(t,z)\\ f_y(t,z)\end{bmatrix}$$

A solução de (1), em termos do operador resposta impulso $\mathsf{h}(t)$, é dada por [2], [4], [7]

$$\mathbf{U}(t,z)=\mathsf{h}_0(t)\mathbf{U}_0(z)+\mathsf{h}_1(t)\dot{\mathbf{U}}_0(z)+\int_0^t\mathsf{h}(t-\tau)\mathbf{f}(\tau)d\tau \tag{3}$$

onde $\mathsf{h}_0(t)$ e $\mathsf{h}_1(t)$ são definidos como

$$\mathsf{h}_0(t)=\dot{\mathsf{h}}(t)\mathbb{M}+\mathsf{h}(t)\mathbb{G} \tag{4}$$

e

$$\mathsf{h}_1(t)=\mathsf{h}(t)\mathbb{M} \tag{5}$$

O operador resposta impulso $\mathsf{h}(t)$ atua sobre funções espaciais $\Phi = \Phi(z)$ da seguinte forma

$$\mathsf{h}(t)\Phi = \int_0^L \mathbf{h}(t,z,\xi)\Phi(\xi)d\xi \tag{6}$$

onde $\mathbf{h}(t,z,\xi)$ é dita **função de Green temporal**. Daí segue que o operador $\dot{\mathsf{h}}(t)$ é definido como

$$\dot{\mathsf{h}}(t)\Phi = \int_0^L \dot{\mathbf{h}}(t,z,\xi)\Phi(\xi)d\xi \tag{7}$$

Além disso

$$\mathbf{U}_0(z) = \begin{bmatrix} u_0(z) \\ v_0(z) \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \dot{\mathbf{U}}_0(z) = \begin{bmatrix} \dot{u}_0(z) \\ \dot{v}_0(z) \end{bmatrix}$$

onde $\mathbf{U}_0(z) = \mathbf{U}_0(0,z)$ e $\dot{\mathbf{U}}_0(z) = \dot{\mathbf{U}}_0(0,z)$ são as condições iniciais do problema e $\mathbb{F}(t)(z) = \mathbf{F}(t,z)$. Aplicando-se o método operacional ao problema (1) decorre o problema de contorno espacial

$$\begin{aligned} &\left[\mathbb{M}s^2 + \mathbb{G}s + \mathbb{K}\right]\widetilde{\mathbf{U}}(s,z) = \\ &= \widetilde{\mathbf{F}}(s,z) + \left[\mathbb{M}s + \mathbb{G}\right]\mathbf{U}_0(z) + \mathbb{M}\dot{\mathbf{U}}_0(z) \end{aligned} \tag{8}$$

sujeita as condições de contorno

$$\mathbf{B}_i\widetilde{\mathbf{U}} = 0 \qquad i = 1,\ldots,4 \tag{9}$$

onde

$$\widetilde{\mathbf{U}}(z,s) = \begin{bmatrix} \widetilde{u}(s,z) \\ \widetilde{v}(s,z) \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{\mathbf{F}}(s,z) = \begin{bmatrix} \widetilde{f}_x(s,z) \\ \widetilde{f}_y(s,z) \end{bmatrix}$$

são os vetores, deslocamento do eixo composto pelas transformadas de Laplace dos seus deslocamentos transversais e força composto pelas transformadas de Laplace das forças externas aplicadas ao eixo.
Utilizando Cramer, o problema de contorno espacial composto pela equação (8) e as condições de contorno (9) é desacoplado em dois problemas de contorno espaciais . Utilizando uma adequada mudança de variável, obtém-se uma fórmula fechada para a resposta em freqüência em termos da função de Green espacial. É feito um estudo sobre as velocidades críticas, relacionadas com o problema de autovalor, e a resposta ao desbalanço para os casos biapoiado e fixo apoiado [1].

Referências

[1] A.C.L. Bidel, "Respostas Periódicas em Sistams Lineares e Fracamente Não Lineares Não Ressonantes e Comportamento Dinâmico de Sistemas Rotativos com o uso da Base Dinâmica", Tese de Doutorado, PROMEC, UFRGS, Porto Alegre, RS, 2003.

[2] A.C.L. Bidel, I. Ferreira, R.D. Copetti, "Uma Abordagem Direta para Sistemas Evolutivos através da Resposta Impulso", *Anais do IV Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicações*, Série Arquimedes 4, (2005) 1838-1887.

[3] A.G. Butkovsky, A.G., "Structural Theory of Distributed Systems", John Wiley, New York, 1983.

[4] J.C. Claeyssen, "On Predicting the Response of Non-Conservative Linear Vibrating Systems by Using Dynamical Matrix Solutions", *Journal of Sound and Vibration*, 140(1) (1990) 73-84.

[5] J.R. Claeyssen, G.C. Suazo, C. Jung, "A Direct Approach to Second-Order Matrix Non-Classical Vibrating Equations", *Applied Numerical Mathematics*, vol. 30, (1999) 65-78.

[6] J.R. Claeyssen, I.F. Moraes, R.D. Copetti, "Decomposition of Forced Responses in Vibrating Systems", *Applied Numerical Mathematics*, 47, (2003) 391-405.

[7] J.R. Claeyssen, R.D. Copetti, J.M. Balthazar, "Modal Analysis of a Beam with a Tip Rotor by using a Fundamental Response", *Materials Science Forum*, 440, (2003) 261-268.

[8] J. H. Ginsberg, "Mechanical and Structural Vibrations - Theory and Applications", John Wiley, New York, 2001.

[9] S.K. Gudonov, "Ordinary Differential Equations with Constant Coefficient", American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1997.

[10] J.R. Claeyssen, T. Tsukazan, "Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations", *Quarterly of Applied Mathematics*, XLVIII, N^o 1 (1990).

[11] J. H. Ginsberg, "Mechanical and Structural Vibrations - Theory and Applications", John Wiley, New York, 2001.

[12] J.M. Vance, "Rotordynamics of Turbomachinery " John Wiley & Sons, New York, 1987.

[13] B. Yang, C. A. Tan, Transfer functions of one-dimensional distributed parameter systems, *Journal of Applied Mechanics*, 59 (1992), 1009-1014.