

O problema da cavidade bidimensional: solução de fluxo incompressível através dos métodos de Volumes Finitos e Meshless

Antônio Carlos Henriques Marques, José Laércio Doricio,

Depto de Engenharia de Materiais, Aeronáutica e Automobilística, EESC, USP

Av. Trabalhador São Carlense, 400, CEP: 13566-590, Centro, São Carlos - SP, Brasil

E-mail: achm@sc.usp.br, josedoricio@yahoo.com.br.

Introdução

O escoamento na cavidade bidimensional tem sido estudado extensivamente e é possível encontrar muitos trabalhos sobre este problema na literatura, não só para testar novos métodos de solução das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis estacionários bidimensionais como também para validação quanto à precisão, eficiência numérica, condições de contorno, etc. O problema da cavidade é resolvido empregando o método de Volumes Finitos, estudado por [8], [7], [10] e [11], com malhas não estruturadas; o método de Diferenças Finitas, método clássico utilizado para resolver problemas envolvendo a cavidade e apresentado por [4], [8], [13] e [15]; e o método Meshless, método alternativo para eliminar o problema da malha que foi desenvolvido por [2] e estudado por [9], [3] e [5], para resolver as equações de Navier-Stokes no caso estacionário. Nesse estudo compara-se os métodos de Volumes Finitos, Diferenças Finitas e Meshless aplicados ao problema da cavidade em termos de precisão numérica e problemas de condições de contorno. As equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível são usadas nas três formulações. São testados baixos e moderados números de Reynolds ($Re=0.1, 10, 50$ e 100). É feita uma breve discussão sobre as naturezas física, matemática e numérica do escoamento na cavidade bidimensional. Nos métodos de Diferenças Finitas e Meshless foi empregado as equações básicas da formulação diferencial. No método de Volumes Finitos empregou-se as equações governantes da formulação integral. A solução do sistema de equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível pode ser feito através de duas estratégias mais comuns: aproximação por função de corrente e vorticidade ou por variáveis primitivas. Nesse estudo, foi adotado a aproximação por variáveis primitivas.

Metodologia

A formulação diferencial das equações de Navier-Stokes na forma adimensional para escoamento in-

compressível bidimensional é dada por:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

onde Re é o número de Reynolds do escoamento definido como $Re = \frac{\rho U_\infty L_\infty}{\nu}$, $\mathbf{u} = (u, v)$ é o campo de velocidade e p é o campo de pressão.

A formulação diferencial dada por (1), integrada no volume de controle V e aplicando o teorema de Green resulta em:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{1}{V} \int_V \frac{\partial p}{\partial x} dV + \frac{1}{V} \oint_S \left[\left(\frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} - u^2 \right) dy - \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} - uv \right) dx \right] , \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\frac{1}{V} \int_V \frac{\partial p}{\partial y} dV + \frac{1}{V} \oint_S \left[\left(\frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} - uv \right) dy - \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} - v^2 \right) dx \right] , \\ \int_V \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dV &= 0 . \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Os métodos de Diferenças Finitas e Meshless são resolvidos utilizando (1) e o método de Volumes Finitos é resolvido por (2) através do método das projeções, para maiores detalhes ver trabalho de [6]. Suponha que o campo de velocidade seja $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n)$ e que as condições de contorno para os campos de velocidade e pressão sejam dados no tempo $t = t_n + \delta t$. Seja $\tilde{p}(\mathbf{x}, t_n)$ o campo de pressão. Inserindo $\tilde{p}(\mathbf{x}, t_n)$ em (1) tem-se para o campo de velocidade $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ o seguinte:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) , \\ \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) , \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

com $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_n) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_n)$. Utilizando as condições de contorno apropriadas para $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_n)$ em $t = t_n$. A equação (3) é resolvida pelo método Meshless ou

por um método explícito de Diferenças Finitas. Seja $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ definido por

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1}) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{n+1}) = -\nabla\psi(\mathbf{x}, t_{n+1}) \quad (4)$$

onde $\psi(\mathbf{x}, t_{n+1})$ possui a seguinte propriedade:

$$\nabla^2\psi(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_{n+1}) . \quad (5)$$

Ainda, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_{n+1})$ conserva a massa e a correta vorticidade no tempo $t = t_n + \Delta t$. A equação para a pressão é obtida subtraindo a equação (1) da equação (3), resultando em:

$$\frac{\partial\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\nabla[p(\mathbf{x}, t) - \tilde{p}(\mathbf{x}, t_n)] . \quad (6)$$

Introduzindo a equação (4) em (6) tem-se $-\frac{\partial\nabla\psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\nabla(p(\mathbf{x}, t) - \tilde{p}(\mathbf{x}, t_n))$. Intercambiando os operadores, $p(\mathbf{x}, t) = \tilde{p}(\mathbf{x}, t_n) + \frac{\partial\psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$, calculado como:

$$p(\mathbf{x}, t_{n+1}) = \tilde{p}(\mathbf{x}, t_n) + \frac{\psi(\mathbf{x}, t_{n+1})}{\delta t} . \quad (7)$$

Portanto, para simular o escoamento deve-se resolver as equações (3), (5), (4) e (7), respectivamente. As derivadas em Diferenças Finitas foram calculadas usando aproximação de segunda ordem e os termos convectivos foram calculados utilizando o esquema VONOS, upwind de segunda ordem estudado por [14]. Para calcular as derivadas no método Meshless foi empregado a formulação de Franke e Nielsen abaixo. Seja

$$V_I(\mathbf{x}) = c_1(x - x_I)^2 + c_2(x - x_I)(y - y_I) + c_3(y - y_I)^2 + c_4(x - x_I) + c_5(y - y_I) + c_6 . \quad (8)$$

Pode-se observar que quando $\mathbf{x} = I$ então $c_6 = V_I$. Para determinar os valores de c_1, \dots, c_5 usa-se o Método dos Mínimos Quadrados. Seja:

$$\xi = x - x_I , \quad \eta = y - y_I , \quad V_I(\mathbf{x}) = f \Rightarrow f(\xi, \eta) = c_1\xi^2 + c_2\xi\eta + c_3\eta^2 + c_4\xi + c_5\eta . \quad (9)$$

Pelo Método dos Mínimos Quadrados $\varphi(\mathbf{x}) = g_1\alpha_1 + g_2\alpha_2 + g_3\alpha_3 + g_4\alpha_4 + g_5\alpha_5$ e comparando com a equação (9) pode-se ver que

$$\begin{aligned} g_1 &= \xi^2, & g_2 &= \xi\eta, & g_3 &= \eta^2, \\ g_4 &= \xi, & g_5 &= \eta . \end{aligned} \quad (10)$$

Então é necessário resolver o sistema $\mathbf{Ac} = \mathbf{b}$ para encontrar os valores das variáveis c_1, \dots, c_5 :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^m g_j(x_k)g_i(x_k) , \quad b_i = \sum_{k=1}^m f(x_k)g_i(x_k) . \quad (11)$$

onde m é o número de vizinhos de I , de acordo com

a Figura 1c. Expandindo a equação (11) tem-se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \langle \xi^2, \xi^2 \rangle_k & \dots & \langle \xi^2, \eta \rangle_k \\ \langle \xi\eta, \xi^2 \rangle_k & \dots & \langle \xi\eta, \eta \rangle_k \\ \langle \eta^2, \xi^2 \rangle_k & \dots & \langle \eta^2, \eta \rangle_k \\ \langle \xi, \xi^2 \rangle_k & \dots & \langle \xi, \eta \rangle_k \\ \langle \eta, \xi^2 \rangle_k & \dots & \langle \eta, \eta \rangle_k \end{bmatrix} , \quad (12)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \langle f, \xi^2 \rangle_k \\ \langle f, \xi\eta \rangle_k \\ \langle f, \eta^2 \rangle_k \\ \langle f, \xi \rangle_k \\ \langle f, \eta \rangle_k \end{bmatrix} .$$

onde $\langle \zeta, \gamma \rangle_k = \sum_{k=1}^m W_k(\xi, \eta)\zeta_k\gamma_k$ e $W_k(\xi, \eta) = e^{-5\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$ é a função peso exponencial, de acordo com a Figura 2. Considerando a equação (9) tem-se:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_I &= \left. \frac{\partial f}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = c_4 , & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_I &= \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = c_5 , \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_I &= \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2} \right|_{\xi=0} = 2c_1 , & & \\ \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_I &= \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=0} = 2c_3 , & \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_I &= \left. \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{\xi=0} = c_2 . \end{aligned} \quad (13)$$

As derivadas encontradas em (13) são usadas para discretizar as equações governantes. No método de Volumes Finitos, a integral de superfície na equação de quantidade de movimento dada por (2) é avaliada no volume de controle dado pela Figura 1a fazendo $E = \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} - u^2$ e $F = \frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} - uv$, assim:

$$\begin{aligned} \oint_S \left[\left(\frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} - u^2 \right) dy - \left(\frac{1}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} - uv \right) dx \right] &= \\ \oint_S E dy - \oint_S F dx &\quad \text{onde} \\ \oint_S E dy \Big|_{E_4} &\approx \frac{1}{2} [(E_4 + E_1)dy_{ab} + (E_4 + E_2)dy_{bc} \\ &\quad + (E_4 + E_3)dy_{cd}] , \\ \oint_S F dx \Big|_{E_4} &\approx \frac{1}{2} [(F_4 + F_1)dx_{ab} + (F_4 + F_2)dx_{bc} \\ &\quad + (F_4 + F_3)dx_{cd}] , \\ \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{E_4} &\approx \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial u}{\partial x} dV = \frac{1}{V} \oint_S u dy \approx \\ \frac{1}{2V} &[(u_4 + u_1)dy_{ab} + (u_4 + u_2)dy_{bc} + (u_4 + u_3)dy_{cd}] . \end{aligned}$$

Para $\frac{\partial u}{\partial y}$ e pontos E_1, E_2 e E_3 o procedimento é análogo. Para resolver o sistema linear, para determinar o campo de pressão, utiliza-se o método dos Gradientes Bi-conjugado Estabilizado, de acordo com [1]. Esse método resolve um sistema linear quando a matriz é assimétrica e não definida positiva.

O escoamento é induzido pelo movimento de deslissamento da parede do topo da cavidade $y = 1$, da

esquerda para a direita. As condições de contorno nas paredes estacionárias são $u = 0$ e $v = 0$, e na parede deslissante $u = 1$ e $v = 0$ de acordo com a Figura 1b. As condições de contorno para o campo de pressão são tipo Neumann $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$, onde n é a direção normal à parede. No canto inferior esquerdo foi utilizada a condição de Dirichlet $p = 0$. Isto foi imposto para assegurar que a matriz do sistema linear do cálculo da pressão não se torne singular. Como o que se procura é a variação do campo de pressão, esta imposição não afeta os resultados. Para assegurar a condição de Neumann no contorno foi utilizado a técnica da reflexão dos nós próximos às paredes estacionárias e deslissante, para os métodos de Volumes Finitos e Meshless. Para a reflexão no método Meshless foi escolhida uma faixa de nós igual ao raio de influência de vizinhos, ao longo das paredes.

Os métodos foram resolvidos usando linguagem de programação C++ implementada em plataforma Linux. Os resultados foram obtidos simulando o problema da cavidade com pontos para o método Meshless mostrado pela Figura 3a, com a malha não estruturada para o método de Volumes Finitos conforme a Figura 3b e com malha estruturada regular, com 50×50 nós, para o método de Diferenças finitas.

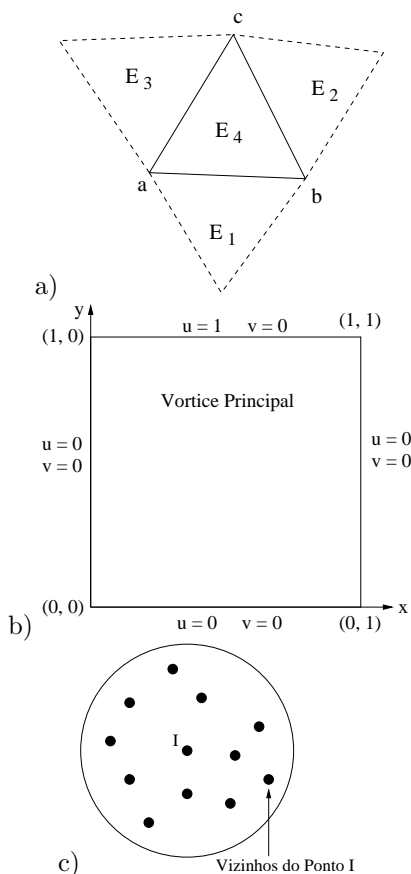


Figura 1: a) Célula de Volumes Finitos b) Problema da cavidade c) Vizinhos do ponto I

FUNCAO PESO

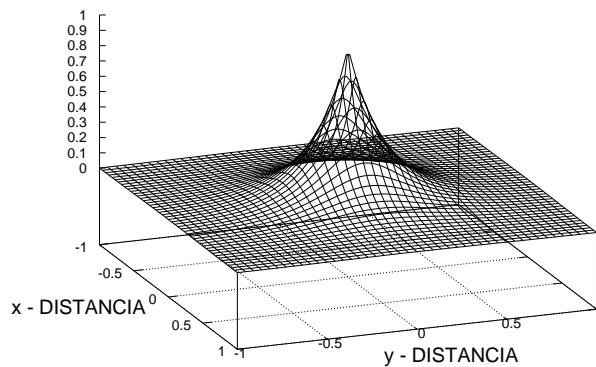


Figura 2: Função peso usada no método Meshless.

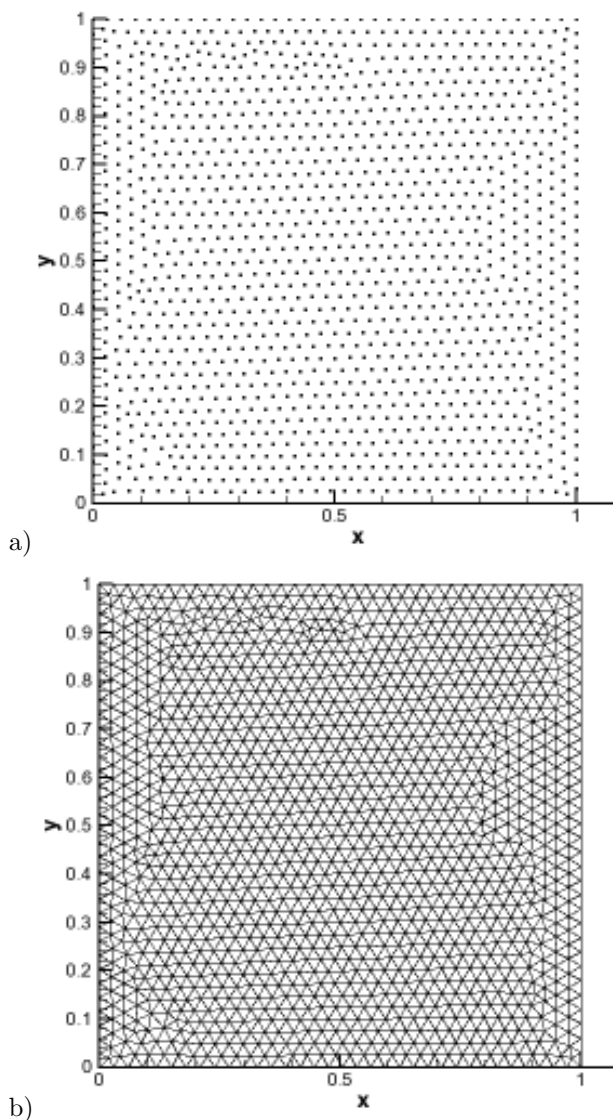


Figura 3: a) Pontos Meshless b) Malha de Volumes Finitos

Resultados

Para comparar os métodos escolheu-se três estratégias: comparar os gráficos de linhas de corrente para os escoamentos propostos ($Re = 1$, $Re = 10$, $Re = 25$, $Re = 50$ e $Re = 100$); comparar os perfís de velocidade, para os vários números de Reynolds, nas linhas centrais $y = 0,5$ (horizontal) e $x = 0,5$ (vertical); e comparar as localizações dos vórtices primários. Serão apresentadas as tabelas com os perfís de velocidades e localização dos vórtices primários e os gráficos de linhas de corrente. Para a montagem dos gráficos e das tabelas foi usado, para os métodos de Volumes Finitos e Meshless, uma faixa de nós ao redor das linhas centrais da cavidade tendo-se em vista que os nós da malha não estruturada não coincidem com os nós da malha estruturada, desta forma foi evitado o uso de interpolações.

| Norma L^∞ | | | | |
|------------------|--------------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| Re | Velocidade u | | Velocidade v | |
| | ε_{fv} | ε_m | ε_{fv} | ε_m |
| 0.1 | 0.06933 | 0.15256 | 0.15161 | 0.17906 |
| 1.0 | 0.06875 | 0.15255 | 0.15108 | 0.17839 |
| 10.0 | 0.06314 | 0.09118 | 0.14424 | 0.16987 |
| 25.0 | 0.05400 | 0.08113 | 0.13928 | 0.16562 |
| 50.0 | 0.03980 | 0.07328 | 0.11294 | 0.14991 |
| 100.0 | 0.03373 | 0.12049 | 0.11839 | 0.24242 |
| Média | 0.05479 | 0.11186 | 0.13625 | 0.18087 |

| Norma L^5 | | | | |
|-------------|--------------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| Re | Velocidade u | | Velocidade v | |
| | ε_{fv} | ε_m | ε_{fv} | ε_m |
| 0.1 | 0.05895 | 0.15376 | 0.11556 | 0.16058 |
| 1.0 | 0.05848 | 0.15377 | 0.11523 | 0.16030 |
| 10.0 | 0.05398 | 0.09044 | 0.10968 | 0.13104 |
| 25.0 | 0.04659 | 0.08193 | 0.10604 | 0.12775 |
| 50.0 | 0.03502 | 0.07966 | 0.08542 | 0.10881 |
| 100.0 | 0.02623 | 0.12297 | 0.09737 | 0.20029 |
| Média | 0.04654 | 0.11375 | 0.10488 | 0.14812 |

Tabela 1: Comparativo do erro na linha central horizontal para $y=0.5$.

Para verificar se o método numérico está resolvendo corretamente o problema da cavidade, comparou-se a posição dos vórtices primários para Diferenças Finitas, Volumes Finitos e Meshless com os resultados apresentados por [12], e montou-se a Tabela 3 para números de Reynolds $Re = 1$ a $Re = 100$. O movimento gerado em uma cavidade quadrada cheia de fluido pela translação uniforme de uma das paredes (tampa deslizante) representa o mais simples exemplo de fluido estacionário envol-

| Norma L^∞ | | | | |
|------------------|--------------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| Re | Velocidade u | | Velocidade v | |
| | ε_{fv} | ε_m | ε_{fv} | ε_m |
| 0.1 | 0.06689 | 0.04191 | 0.00725 | 0.00966 |
| 1.0 | 0.06684 | 0.04190 | 0.00709 | 0.01046 |
| 10.0 | 0.06641 | 0.02089 | 0.02182 | 0.02433 |
| 25.0 | 0.06645 | 0.02305 | 0.02037 | 0.03650 |
| 50.0 | 0.06912 | 0.02275 | 0.01729 | 0.04668 |
| 100.0 | 0.07905 | 0.06303 | 0.01474 | 0.06069 |
| Média | 0.06912 | 0.03558 | 0.01476 | 0.03138 |

| Norma L^5 | | | | |
|-------------|--------------------|-----------------|--------------------|-----------------|
| Re | Velocidade u | | Velocidade v | |
| | ε_{fv} | ε_m | ε_{fv} | ε_m |
| 0.1 | 0.05980 | 0.05839 | 0.00856 | 0.01121 |
| 1.0 | 0.05975 | 0.05838 | 0.00835 | 0.01134 |
| 10.0 | 0.05938 | 0.02506 | 0.02527 | 0.03150 |
| 25.0 | 0.05950 | 0.02429 | 0.02387 | 0.03696 |
| 50.0 | 0.06231 | 0.02679 | 0.02053 | 0.04372 |
| 100.0 | 0.07229 | 0.06243 | 0.01835 | 0.05631 |
| Média | 0.06217 | 0.04222 | 0.01748 | 0.03184 |

Tabela 2: Comparativo do erro na linha central vertical para $x=0.5$.

| Re | Diferenças Finitas | | Volumes Finitos | |
|-----|--------------------|----------|-----------------|----------|
| | x | y | x | y |
| 0.1 | 0.488348 | 0.762482 | 0.497894 | 0.763801 |
| 1 | 0.490657 | 0.762462 | 0.499894 | 0.763108 |
| 10 | 0.504512 | 0.761495 | 0.506058 | 0.762380 |
| 25 | 0.529913 | 0.759189 | 0.539150 | 0.760801 |
| 50 | 0.569170 | 0.758218 | 0.571479 | 0.761495 |
| 100 | 0.610735 | 0.733819 | 0.613045 | 0.740738 |

| Re | Diferenças Finitas | | Meshless | |
|-----|--------------------|----------|----------|----------|
| | x | y | x | y |
| 0.1 | 0.488348 | 0.762482 | 0.502013 | 0.743044 |
| 1 | 0.490657 | 0.762462 | 0.503282 | 0.742738 |
| 10 | 0.504512 | 0.761495 | 0.518367 | 0.753882 |
| 25 | 0.529913 | 0.759189 | 0.543793 | 0.755796 |
| 50 | 0.569170 | 0.758218 | 0.576778 | 0.755314 |
| 100 | 0.610735 | 0.733819 | 0.630675 | 0.743429 |

Dados de Schreiber e Keller

| Reynolds | x | y |
|----------|---------|---------|
| 1 | 0.50000 | 0.76667 |
| 100 | 0.61667 | 0.74167 |

Tabela 3: Localização do centro do vórtice primário.

vendo linhas de corrente fechadas. O escoamento do fluido no interior da cavidade possui viscosidade e forças inerciais que produzirão sua recirculação devido à translação da tampa. Dos gráficos de linhas de corrente apresentados pelas Figuras 4 a 6 e da posição dos centros dos vórtices (primário, e secundários) pode-se perceber que o método de Volumes Finitos obteve melhores resultados que o método Meshless. Ainda, aumentando o número de Reynolds há o deslocamento do centro do vórtice primário e pequenas perturbações nos vórtices secundários.

De acordo com [2], a formulação Meshless tem melhor precisão quando comparada com formulações que usam malha adaptativa em esquemas viscosos. O experimento numérico realizado nesse trabalho mostrou que o método Meshless não é muito preciso para capturar a vorticidade nos cantos do fundo da cavidade (segundo vórtice). Este problema está comumente associado à descontinuidade dos cantos e às condições de contorno, como citado por [5] e [3]. Quando o valor do número de Reynolds aumenta a inadequação da distribuição de pontos ou do refinamento da malha torna-se aparente. Isto significa que a distribuição de velocidades próxima dos cantos é sensível ao tamanho da malha. Das Tabelas 1 a 3 pode-se observar que, em média, o método de Volumes Finitos tem melhor aproximação que o método Meshless quando comparados com o método de Diferenças Finitas. Isto ocorre porque o erro aumenta onde há maior transporte de fluido e difusividade numérica. No método Meshless, a escolha do raio de influência dos vizinhos e a função peso estão diretamente relacionados a este fato. No entanto resta ainda o problema da descontinuidade do contorno nos cantos.

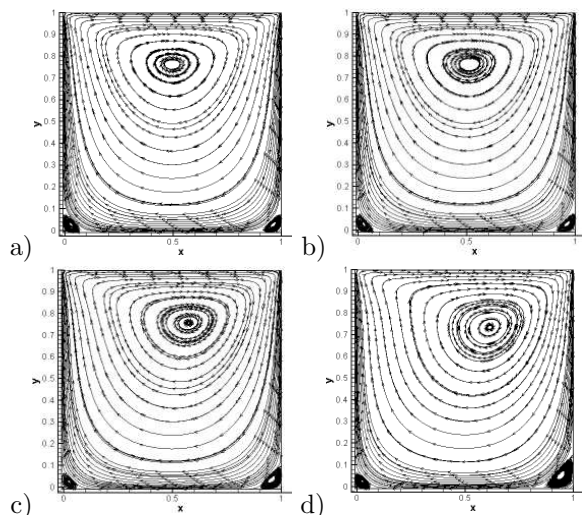


Figura 4: Diferenças Finitas: a) $Re = 0.1$ b) $Re = 10$ c) $Re = 50$ d) $Re = 100$.

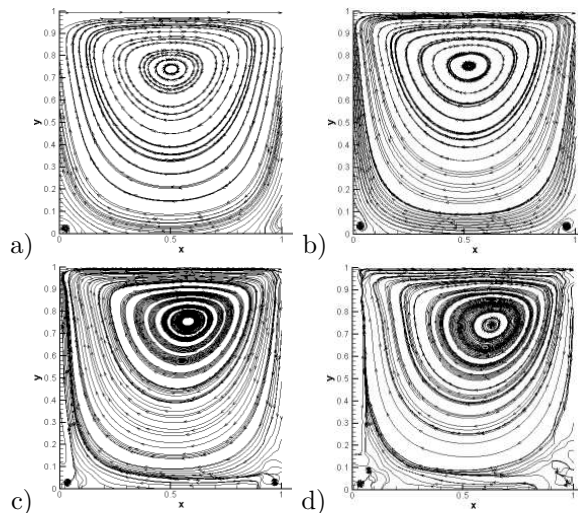


Figura 5: Meshless: a) $Re = 0.1$ b) $Re = 10$ c) $Re = 50$ d) $Re = 100$.

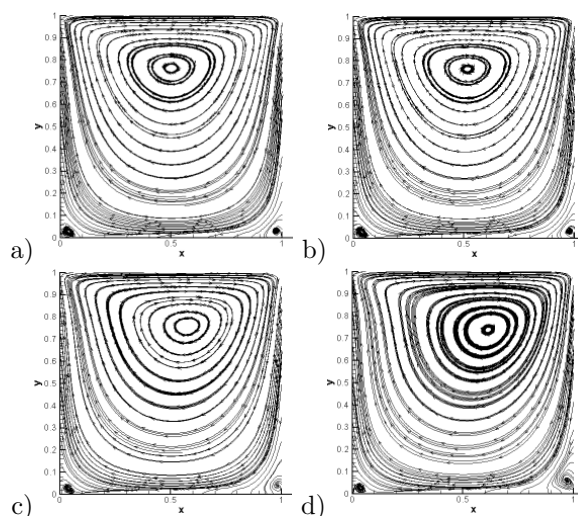


Figura 6: Volumes Finitos: a) $Re = 0.1$ b) $Re = 10$ c) $Re = 50$ d) $Re = 100$.

Conclusões

O escoamento apresenta características globais e locais. Globalmente o escoamento ajusta-se aos gradientes resultantes da presença dos finais de parede e das condições de contorno. Localmente o escoamento contém o vórtice primário e os vórtices de canto, os quais dependem principalmente do número de Reynolds. A redução dos efeitos viscosos produz redução do erro nas componentes u e v da velocidade na linha central da cavidade, enquanto que na linha vertical o erro aumenta com a redução dos efeitos viscosos nas componentes u e v , para os métodos de Volumes Finitos e Meshless. A comparação dos resultados através das linhas centrais da cavidade produziu dispersão porque as linhas centrais não passam pelo centro do vórtice primário. Também, a flutuação da velocidade na direção verti-

cal é maior que na direção horizontal. Com relação à precisão a partir dos dados da Tabela 3, conclui-se que os dados do vórtice primário estão corretos, apresentando uma variação de até 2% em relação a [12].

Referências

- [1] R. Barret, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, V. Eijkhout, R. Pozzo, Romine C, and H. Van der Vorst. “Templates for the solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods”. SIAM, 1994.
- [2] T. Belytschko, Y. Krongaus, D. Organ, M. Fleming, and P. Krysl. Meshless methods: An overview and recent developments. *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering*, 139:3–47, 1996.
- [3] H. J. Choe, D. W. Kim, H. H. Kim, and Y. Kim. Meshless method for the stationary incompressible navier-stokes equations. *Discrete And Continuous Dynamic Systems. Series B*, 1(4):495–526, 2001.
- [4] C. A. J. Fletcher. “Computational Techniques for Fluid Dynamics”. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [5] F. C. Günter and W. K. Liu. Implementation of boundary conditions for meshless methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1997.
- [6] F. Harlow and J. E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface. *Phys. Fluids*, 8:2182–2189, 1965.
- [7] C. R. Maliska and J. F. V. Vasconcellos. An unstructured finite volume procedure for simulating flows with moving fronts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 401–420, 2000.
- [8] Clovis R. Maliska. “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2000.
- [9] J. M. Melenk. On approximation in meshless methods. *ETH-Eidgenössische Technische Hochschule Zürich*, 1997.
- [10] F. A. Schneider and C. R. Maliska. Uma formulação em volumes finitos usando malhas não-estruturadas. *VIII ENCIT - Encontro Nacional de Ciências Térmicas*, CD Rom edition, 2000.
- [11] F. A. Schneider and C. R. Maliska. Solução numérica simultânea de escoamentos bidimensionais incompressíveis pelo método dos volumes finitos usando malhas não-estruturadas. *ENCIT-9Th Brazilian Congress of Thermal Engineering and Sciences*, 2002.
- [12] R. Schreiber and H. B. Keller. Driven cavity flows by efficient numerical techniques. *Journal of Computational Physics*, 49:310–333, 1983.
- [13] B. D. Semeraro and A. Sameh. Solution of the navier-stokes equations for a driven cavity. *NASA-CR-188008 and Illinois University*, 1991.
- [14] A. Varonos and G. Bergeles. Development and assessment of a variable order non-oscillatory scheme for convection term discretization. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 26:1–16, 1998.
- [15] H. K. Versteeg and W. Malalasekera. “An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method”. Prentice Hall, Essex, 1995.