

Formulação de Elementos Finitos estabilizados para estruturas flexíveis no espaço 3D

Antônio J.B. Santos*

Abimael F. D. Loula,

João N. C. Guerreiro

LNCC – Laboratório Nacional de Computação Científica,

25651-070, Petrópolis, RJ

E-mail: boness@lncc.br, aloc@lncc.br, joao@lncc.br

1 Introdução

Estruturas flexíveis, são largamente empregadas em muitos problemas de interesse prático na engenharia. Muitos desses problemas, como por exemplo, a análise de tensões de membros estruturais de pontes, edifícios altos e riseres para a extração de petróleo podem e são modelados com suficiente precisão como estruturas unidimensionais no espaço tridimensional. O interesse na modelagem desse tipo de estrutura tem seu crescimento continuado à medida em que se percebe potenciais aplicações em outras áreas do conhecimento como biomédica, microbiologia, biologia molecular e química.

O método dos elementos finitos, na sua forma clássica, baseada na formulação de Galerkin, é uma técnica bastante utilizada na obtenção de soluções aproximadas de problemas envolvendo estruturas flexíveis unidimensionais. Entretanto, as escolhas das ordens de interpolação dos campos envolvidos podem ser extremamente delicadas em estruturas delgadas modeladas pela teoria de Timoshenko bem como em estruturas curvas delgadas onde ocorrem acoplamentos entre esforços de membrana e de flexão. Observações experimentais mostram que deslocamento calculados por escolhas inadequadas levam a valores menores que os reais.

Muitas investigações no sentido de sanar este problema já foram feitas explorando formulações de elementos finitos mistos na análise de estruturas unidimensionais planas (vigas e arcos planos) como podemos encontrar nos trabalhos [1], [5], [7] e [8]. Loula et al. estudaram esses problemas com a dependência de um parâmetro pequeno de esbeltez, e introduziram uma formulação mista de Petrov-Galerkin para a construção de aproximações discretas do problema da viga [6] e do arco de Timoshenko [5]. A formulação variacional por eles adotada seguiu o princípio de Hellinger-Reissner no qual as tensões generalizadas (variável primal) e os deslocamentos generalizados (multiplicadores) são as variáveis independentes do problema. Essa formulação, além de trazer ganhos na ordem de convergência, possibilitou escolhas de elementos finitos

de igual ordem para a interpolação dos campos de deslocamentos e tensões. Tais escolhas são instáveis na formulação de Galerkin.

Para estruturas unidimensionais, Arunakirinathar e Reddy [1] estenderam para o espaço 3D os estudos feitos por [8] e [2] para o caso de estruturas planas. Estes autores apresentaram uma formulação mista em que os deslocamentos generalizados são as variáveis principais e as tensões cisalhantes generalizadas os multiplicadores. Entretanto, como suas variáveis independentes são unicamente as tensões cisalhantes, essa formulação perde precisão no cálculo dos esforços de flexão e torção, pois estes são obtidos por cálculos indiretos.

Nesse trabalho, usando resultados de geometria diferencial apresentados por Arunakirinathar e Reddy [1], estendemos a metodologia desenvolvida por Loula et al. [5], para modelar o caso geral de uma viga flexível com geometria e carregamento arbitrário no espaço tridimensional usando a formulação mista de Petrov-Galerkin. Na Seção 2 desse artigo descrevemos aspectos referentes a geometria do modelo e apresentamos funções intrínsecas baseadas na geometria diferencial de curvas. Na Seção 3 o sistema de equações que o descreve é apresentado na sua forma adimensional explicitando a dependência do parâmetro ε^2 . Sua cinemática baseia-se na teoria de viga de Timoshenko que impõe as hipóteses das seções transversais da estrutura serem restritas a permanecerem planas, mas não necessariamente normais ao eixo de centróides, depois da deformação. Isso nos possibilita trabalhar com dois campos cinemáticos, deslocamento e rotação, reduzindo assim a ordem das derivadas das equações. Na Seção 4 construímos a formulação variacional contínua do modelo, discutimos e apresentamos os resultados de existência e unicidade de solução. Na Seção 5 apresentamos as aproximações de Galerkin e de Petrov-Galerkin para o problema e desenvolvemos a análise da formulação de Petrov-Galerkin estabelecendo existência e unicidade da solução discreta bem como estabilidade e convergência uniformes (independente do parâmetro pequeno ε^2). Através desta formulação estabilizada recuperamos a estabilidade e convergência das aproximações de igual

*Agradeço à FAPERJ pelo suporte financeiro durante o curso deste trabalho.

ordem para esforços e deslocamentos generalizados instáveis na forma de Galerkin. Na Seção 6 apresentamos uma aplicação numérica comprovando os resultados da análise numérica desenvolvida.

2 Geometria

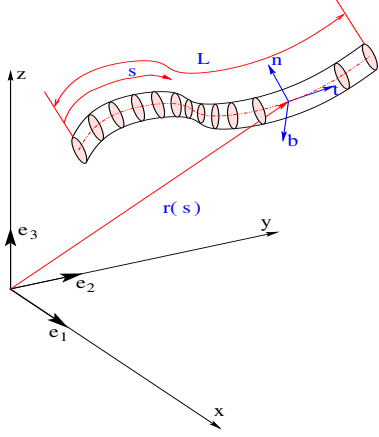


Figura 1: Modelo esquemático da estrutura flexível.

A configuração do eixo de centroides da estrutura é representada por uma curva regular $\mathbf{r} : (0, L) \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizada por um comprimento de arco $s \in (0, L) \subset \mathbb{R}$. Para cada valor de s temos associados três vetores unitários e ortogonais $\mathbf{t}(s)$ vetor tangente, $\mathbf{n}(s)$ vetor normal e $\mathbf{b}(s)$ vetor binormal (Figura 1). O triedro formado por esses vetores no ponto s é chamado de Triedro de Frenet. Suas derivadas com relação a s , $\mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}'(s) = -\mu(s)\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\mathbf{t}(s) - \mu(s)\mathbf{b}(s)$ expressas na base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ nos dão informações sobre o comportamento de $\mathbf{r}(s)$ na vizinhança de s e são conhecidas como relações de Serret-Frenet. As funções geométricas $\kappa(s) > 0$ e $\mu(s) > 0$ são denominadas de curvatura e torção, respectivamente. Considerando $\mathbf{v}(s) = (v_1, v_2, v_3)$ uma função vetorial expressa na base $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$, utilizaremos a notação $\mathbf{v}'(s)$ para nos referir a diferenciação tanto das componentes quanto dos vetores que compõem a base, isto é,

$$\mathbf{v}'(s) = (v'_1 - \kappa v_2) \mathbf{t} + (v'_2 + \kappa v_1 - \mu v_3) \mathbf{n} + (v'_3 + \mu v_2) \mathbf{b}$$

3 Modelo

Este modelo simula o comportamento de uma estrutura flexível no espaço tridimensional e tem sua cinemática fundamentalmente governada pela teoria de vigas de Timoshenko.

A estrutura é considerada engastada em uma de suas extremidades e livre na outra, possui comprimento L , seção transversal A , momento polar de inércia J , momento de inércia I_n e I_θ (em relação ao eixo $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$, respectivamente), coeficiente

de correção para compensar a distribuição não uniforme da tensão cisalhante k_n e k_θ (na seção que contém $\mathbf{n}(s)$ e $\mathbf{b}(s)$, respectivamente), módulo de Young E , módulo cisalhante G e está sujeita a cargas distribuídas por unidade de comprimento $F_f(s) = \{f_t, f_n, f_\theta\}^t$ e $F_m(s) = \{m_t, m_n, m_\theta\}^t$. Nós denotamos por $U(s) = \{u_t, u_n, u_\theta\}^t$ e $\phi = \{\phi_t, \phi_n, \phi_\theta\}^t$ os deslocamentos generalizados (deslocamento e rotações da linha de centroides) e $N(s) = \{N_t, N_n, N_\theta\}^t$ e $M(s) = \{M_t, M_n, M_\theta\}^t$ os esforços generalizados.

Para melhor explicitar as relações existentes entre o comprimento e a seção da estrutura faremos as seguintes adimensionalizações

$$u_1 = \frac{u_t}{L}, \quad u_2 = \frac{u_n}{L}, \quad u_3 = \frac{u_\theta}{L}, \quad (1)$$

$$\theta_1 = \phi_t, \quad \theta_2 = \phi_n, \quad \theta_3 = \phi_\theta, \quad (2)$$

$$\sigma_1 = \frac{NL^2}{EI_n}, \quad \sigma_2 = \frac{Q_n L^2}{EI_n}, \quad \sigma_3 = \frac{Q_\theta L^2}{EI_n}, \quad (3)$$

$$\sigma_4 = \frac{M_t L}{EI_n}, \quad \sigma_5 = \frac{M_n L}{EI_n}, \quad \sigma_6 = \frac{M_\theta L}{EI_n}, \quad (4)$$

$$f_1 = \frac{f_t L^3}{EI_n}, \quad f_2 = \frac{f_n L^3}{EI_n}, \quad f_3 = \frac{f_\theta L^3}{EI_n}, \quad (5)$$

$$f_4 = \frac{m_t L^2}{EI_n}, \quad f_5 = \frac{m_n L^2}{EI_n}, \quad f_6 = \frac{m_\theta L^2}{EI_n}, \quad (6)$$

e introduzimos os parâmetros

$$\varepsilon^2 = \frac{I_n}{L^2 A}; \quad \chi^2 = \frac{E}{G k_n}; \quad \rho^2 = \frac{E}{G k_\theta}$$

$$\gamma^2 = \frac{EI_n}{GJ}; \quad \iota^2 = \frac{I_n}{I_\theta},$$

que adquirem valores pequenos ($\varepsilon^2 \ll 1$) e unitários ($\chi^2, \rho^2, \gamma^2, \iota^2 \approx 1$) a medida que a estrutura torna-se mais esbelta. Isso conduz ao seguinte problema adimensional:

Problema A: Dados $\mathbf{f}_u(s) = \{f_1, f_2, f_3\}^t$ e $\mathbf{f}_\theta(s) = \{f_4, f_5, f_6\}^t$, encontrar $\mathbf{u}(s) = \{u_1, u_2, u_3\}^t$, $\boldsymbol{\theta}(s) = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}^t$, $\boldsymbol{\sigma}_u(s) = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}^t$ e $\boldsymbol{\sigma}_\theta(s) = \{\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}^t$, com $s \in (0, 1)$ satisfazendo

Equações de equilíbrio

$$-\boldsymbol{\sigma}'_\theta(s) + \boldsymbol{\sigma}_u(s) \wedge \mathbf{t}(s) = \mathbf{f}_\theta(s) \quad (7)$$

$$-\boldsymbol{\sigma}'_u(s) = \mathbf{f}_u(s) \quad (8)$$

Equações constitutivas

$$-\mathbf{E}\boldsymbol{\sigma}_\theta(s) = \boldsymbol{\theta}'(s) \quad (9)$$

$$-\bar{\mathbf{D}}\boldsymbol{\sigma}_u(s) = \mathbf{u}'(s) - \boldsymbol{\theta}(s) \wedge \mathbf{t}(s) \quad (10)$$

Condições de contorno

$$\mathbf{u}(0) = 0 \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\theta}(0) = 0 \quad (12)$$

onde

$$\mathbf{E} = \text{diag}(\gamma^2, 1, \iota^2) \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{D}} = \varepsilon^2 \mathbf{D} \quad (14)$$

$$\mathbf{D} = \text{diag}(1, \chi^2 \rho^2) \quad (15)$$

4 Formulação variacional

Seja $L_2(0, 1)$ o espaço de funções de quadrado integrável no sentido de Lebesgue e $H(0, 1)$ o espaço de Hilbert

$$H(0, 1) = \{v; v \in L_2(0, 1), v' \in L_2(0, 1), v(0) = 0\}$$

Com essas definições, identificaremos os espaços de Hilbert $Q = (L_2(0, 1))^3$ e $S = (H(0, 1))^3$ com produto interno e norma dados, respectivamente, por

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_0^1 \boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\tau} \, ds; \quad \|\boldsymbol{\sigma}\| = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})^{\frac{1}{2}} \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in Q \quad (16)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_1 = \int_0^1 \mathbf{u}' \mathbf{v}' \, ds; \quad |\mathbf{v}|_1 = (\mathbf{v}, \mathbf{v})_1^{\frac{1}{2}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in S \quad (17)$$

onde é possível provar que a seminorma $|\cdot|_1$ é uma norma em S , e $W = Q \times Q$ e $V = S \times S$ com norma e produto interno dados, respectivamente, por

$$(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = (\boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\tau}_u) + (\boldsymbol{\sigma}_\theta, \boldsymbol{\tau}_\theta); \quad \|\boldsymbol{\tau}\|_W^2 = \|\boldsymbol{\tau}_u\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}_\theta\|^2 \quad (18)$$

$$(\mathbf{z}, \mathbf{w})_1 = (\mathbf{u}', \mathbf{v}') + (\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\psi}'); \quad \|\mathbf{w}\|_V^2 = |\mathbf{v}'|_1^2 + |\boldsymbol{\psi}'|_1^2 \quad (19)$$

onde

$$\mathbf{z} = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}\}^t, \quad \mathbf{w} = \{\mathbf{v}, \boldsymbol{\psi}\}^t \\ \boldsymbol{\sigma} = \{\boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\sigma}_\theta\}^t, \quad \boldsymbol{\tau} = \{\boldsymbol{\tau}_u, \boldsymbol{\tau}_\theta\}^t$$

Considerando $\boldsymbol{\sigma} \in Q$ e $\mathbf{E} : W \rightarrow W$ um operador, definimos sua norma por

$$\|\mathbf{E}\| = \max_{\boldsymbol{\sigma} \neq 0} \frac{\|\mathbf{E}\boldsymbol{\sigma}\|}{\|\boldsymbol{\sigma}\|}$$

Com isso, podemos apresentar o **Problema A** equivalentemente na forma variacional abstrata através do seguinte problema

Problema P: Dados $\{\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_\theta\}^t \in V'$, encontrar $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{z}\}^t \in W \times V$ tais que

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) + b(\mathbf{z}, \boldsymbol{\tau}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in W \\ b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in V$$

onde V' é o espaço dual de V ,

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = -(\mathbf{E}\boldsymbol{\sigma}_\theta, \boldsymbol{\tau}_\theta) - \varepsilon^2 (\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}_u, \boldsymbol{\tau}_u) \quad (20)$$

$$b(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{z}) = (\boldsymbol{\sigma}_\theta, \boldsymbol{\theta}') + (\boldsymbol{\sigma}_u, \mathbf{u}' - \boldsymbol{\theta} \wedge \mathbf{t}) \quad (21)$$

$$f(\mathbf{z}) = (\mathbf{f}_u, \mathbf{u}) + (\mathbf{f}_\theta, \boldsymbol{\theta}) \quad (22)$$

4.1 Existência e unicidade de solução

Sem perda de generalidade, consideraremos na análise $\varepsilon^2 \ll 1$ e $\chi^2 = \rho^2 = \gamma^2 = \iota^2 = 1$. O **Problema P** ajusta-se à classe de formulações mistas abstratas estudadas por Brezzi, Babuška e outros. O teorema de Brezzi [3] afirma que o esse problema tem solução única para qualquer valor de ε , inclusive o zero, se as propriedades de continuidade das formas $a(\cdot, \cdot)$ e $b(\cdot, \cdot)$, coercividade de $a(\cdot, \cdot)$ e a

condição de compatibilidade entre os espaços (LBB) forem garantidas.

Continuidade: As formas bilineares $a : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ e $b : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas. Existem constantes positivas $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ e $\beta_1 \in \mathbb{R}$ independente de ε tais que

$$a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) \leq \alpha_1 \|\boldsymbol{\sigma}\|_W \|\boldsymbol{\tau}\|_W \quad \forall \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau} \in W, \quad (23)$$

$$b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{z}) \leq \beta_1 \|\boldsymbol{\tau}\|_W \|\mathbf{z}\|_V \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in W, \mathbf{z} \in V \quad (24)$$

Coercividade de $a(\cdot, \cdot)$: Existe uma constante positiva $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ independente de ε tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau} \in K} \frac{a(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_W} \geq \alpha_2 \|\boldsymbol{\tau}\|_W \quad \forall \boldsymbol{\tau} \in K \quad (25)$$

onde

$$K = \{\boldsymbol{\tau} \in W; b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in V\} \quad (26)$$

Condição LBB: Existe uma constante positiva $\beta_2 \in \mathbb{R}$ independente de ε tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau} \in W} \frac{b(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{z})}{\|\boldsymbol{\tau}\|_W} \geq \beta_2 \|\mathbf{z}\|_V \quad \forall \mathbf{z} \in V. \quad (27)$$

Para o **Problema P** encontramos $\alpha_1 = 2\|\mathbf{E}\|$, $\alpha_2 = \frac{\|\mathbf{E}\|}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$, $\beta_1 = 2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\beta_2 = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

5 Aproximações por Elementos Finitos

Nessa seção, construiremos e analisaremos uma nova aproximação por elementos finitos do **Problema P**. Seja I_e a partição de elementos finitos, h_e o tamanho de I_e e n_{el} o número total de elementos, denotamos por $h = \max\{h_e\}, 1 \leq e \leq n_{el}$ o parâmetro de malha. Definindo

$$Q_h = \{\boldsymbol{\tau}_h \in (C^{-1}(0, 1))^3; \boldsymbol{\tau}_h(I_e) \in P_l(I_e)\}$$

o espaço das funções descontínuas cuja restrição a I_e são polinômios de grau l e $S_h = Q_h \cap C^0 \cap H(0, 1)$ o espaço das funções contínuas cuja restrição ao elemento são polinômios de grau l , identificamos por $V_h = Q_h \times Q_h \subset V$ e $W_h = S_h \times S_h \subset W$ os espaços de aproximações para W e V , respectivamente. Isso quer dizer que $\boldsymbol{\tau}_h$ e \mathbf{z}_h são aproximações de igual ordem para $\boldsymbol{\tau}$ e \mathbf{z} , respectivamente, diferindo por $\boldsymbol{\tau}_h$ ser descontínuo e \mathbf{z}_h ser contínuo no contorno dos elementos.

Com isso, a aproximação de Galerkin do **Problema P** é dada por

Problema P_h: Encontrar $\{\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{z}_h\}^t \in W_h \times V_h$ tais que

$$a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\mathbf{z}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in W_h \\ b(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{w}_h) = f(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_h$$

onde

$$a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = -(\mathbf{E}\boldsymbol{\sigma}_{\theta h}, \boldsymbol{\tau}_{\theta h}) - \varepsilon^2(\mathbf{D}\boldsymbol{\sigma}_{uh}, \boldsymbol{\tau}_{uh}) \quad (28)$$

$$b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{z}_h) = (\boldsymbol{\sigma}_{\theta h}, \boldsymbol{\theta}'_h) + (\boldsymbol{\sigma}_{uh}, \mathbf{u}'_h - \boldsymbol{\theta}_h \wedge \mathbf{t}) \quad (29)$$

$$f(\mathbf{z}_h) = (\mathbf{f}_{uh}, \mathbf{u}_h) + (\mathbf{f}_{\theta h}, \boldsymbol{\theta}_h) \quad (30)$$

A estabilidade dessa formulação está fundamentalmente atrelada à dimensão do parâmetro ε . Para valores grandes de ε , a formulação consegue aproximar a solução do problema sem maiores dificuldades, entretanto à medida em que esses valores diminuem complicações numéricas, como diminuição da precisão da solução e baixas taxas de convergência, começam a surgir até que no limite em que $\varepsilon \rightarrow 0$ há o trancamento (locking) onde a formulação perde completamente a capacidade de representar a solução. Isso se explica devido ao fato de não ser possível satisfazer à propriedade de coercividade do operados $a(\cdot, \cdot)$ independente do parâmetro ε .

Uma forma de resolver este problema é aumentar a ordem dos polinômios de interpolação. Entretanto, isso acarreta taxas de convergências subótima [6]. Uma outra forma, a qual seguiremos, é aproximar o **Problema P** por uma formulação de Petrov-Galerkin dada por

Problema PG: Encontrar $\{\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{z}_h\}^t \in W_h \times V_h$ tais que

$$\begin{aligned} a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + b(\mathbf{z}_h, \boldsymbol{\tau}_h) &= g_h(\boldsymbol{\tau}_h) \quad \forall \boldsymbol{\tau}_h \in W_h \\ b(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{w}_h) &= f(\mathbf{w}_h) \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_h \end{aligned}$$

onde

$$a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) = a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) + a_\delta(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)_h \quad (31)$$

$$a_\delta(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)_h = \sum_{e=1}^{n_{el}} a_e(\boldsymbol{\sigma}_e, \boldsymbol{\tau}_e) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} a_e(\boldsymbol{\sigma}_e, \boldsymbol{\tau}_e) &= -\delta_1 h_e^2 (\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e} - \boldsymbol{\sigma}_{ue} \wedge \mathbf{t}, \boldsymbol{\tau}'_{\theta e} - \boldsymbol{\tau}_{ue} \wedge \mathbf{t}) \\ &\quad - \delta_2 h_e^2 (\boldsymbol{\sigma}'_{ue}, \boldsymbol{\tau}'_{ue}) \end{aligned} \quad (33)$$

$$b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{z}_h) = (\boldsymbol{\sigma}_{\theta h}, \boldsymbol{\theta}'_h) + (\boldsymbol{\sigma}_{uh}, \mathbf{u}'_h - \boldsymbol{\theta}_h \wedge \mathbf{t}) \quad (34)$$

$$f(\mathbf{z}_h) = (\mathbf{f}_{uh}, \mathbf{u}_h) + (\mathbf{f}_{\theta h}, \boldsymbol{\theta}_h) \quad (35)$$

$$g_h(\boldsymbol{\tau}_h) = \sum_{e=1}^{n_{el}} g_e(\boldsymbol{\tau}_e) \quad (36)$$

$$g_e(\boldsymbol{\tau}_e) = (\mathbf{f}_{\theta e}, \boldsymbol{\tau}'_{\theta e} - \boldsymbol{\tau}_{ue} \wedge \mathbf{t}) + (\mathbf{f}_{ue}, \boldsymbol{\tau}'_{ue}) \quad (37)$$

$\boldsymbol{\tau}_e$ representa a restrição de $\boldsymbol{\tau}_h$ a I_e , $\delta_1 \geq 0$ e $\delta_2 \geq 0$ constantes.

Como podemos perceber pela equação (31), a forma $a_h(\cdot, \cdot)$ possui, além da forma discreta de $a(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$, um termo adicional que desempenha um papel estabilizador. Esse termo provém de uma adição consistente de formas residuais de mínimos quadrados das equações de equilíbrio do problema.

A existência e unicidade de solução do **Problema PG** independente de ε é garantida pela forma discreta do teorema de Brezzi [3]. Como $V_h \subset V$ e $W_h \subset W$ a propriedade de continuidade

da forma $b(\cdot, \cdot)$ é herdada da forma contínua. Entretanto, em geral $K_h \not\subset K$ e com isso todas as outras condições do caso contínuo devem ser verificadas no caso discreto.

Lema 1 Para todo $\boldsymbol{\tau}_{\theta h} \in Q_h$ existe uma constante positiva $C \in \mathbb{R}$ independente de ε e h tal que

$$\|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e}\|^2 \leq \frac{C}{h_e^2} \|\boldsymbol{\tau}_{\theta e}\|^2 \quad (38)$$

onde $\boldsymbol{\tau}_{\theta e}$ é a restrição de $\boldsymbol{\tau}_{\theta h}$ a I_e .

Prova. Por definição

$$\|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e}\|^2 = \|\boldsymbol{\tau}'_{4e}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}'_{5e}\|^2 + \|\boldsymbol{\tau}'_{6e}\|^2$$

usando a estimativa inversa

$$\|\zeta'_{ie}\|^2 \leq \frac{C}{h_e^2} \|\zeta_{ie}\|^2, \quad i = 4, 5, 6 \quad (39)$$

[4] para as funções τ_{ie} obtemos (38). ■

Lema 2 (Continuidade de $a_h(\cdot, \cdot)$). Existe uma constante positiva $\alpha_3 \in \mathbb{R}$ independente de ε e h tal que

$$a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h) \leq \alpha_3 \|\boldsymbol{\sigma}_h\|_W \|\boldsymbol{\tau}_h\|_W \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h \in W_h \quad (40)$$

Prova. Pela definição (31) temos

$$|a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| \leq |a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| + \sum_{e=1}^{n_{el}} |a_e(\boldsymbol{\sigma}_e, \boldsymbol{\tau}_e)| \quad (41)$$

Analisando separadamente os dois termos do lado direito observamos que o primeiro tem sua continuidade garantida diretamente pela forma contínua (23)

$$|a(\boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h)| \leq 2 \|\mathbf{E}\| \|\boldsymbol{\sigma}_h\|_W \|\boldsymbol{\tau}_h\|_W \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_h, \boldsymbol{\tau}_h \in W_h. \quad (42)$$

Para o segundo termo temos por (33)

$$\begin{aligned} |a_e(\boldsymbol{\sigma}_e, \boldsymbol{\tau}_e)| &\leq \delta_1 h_e^2 (\|\boldsymbol{\sigma}'_{\theta e}\| + \|\boldsymbol{\sigma}_{ue} \wedge \mathbf{t}\|) (\|\boldsymbol{\tau}'_{\theta e}\| + \\ &\quad \|\boldsymbol{\tau}_{ue} \wedge \mathbf{t}\|) + \delta_2 h_e^2 \|\boldsymbol{\sigma}'_{ue}\| \|\boldsymbol{\tau}'_{ue}\| \end{aligned} \quad (43)$$

fazendo uso da desigualdade (38) obtemos

$$|a_e(\boldsymbol{\sigma}_e, \boldsymbol{\tau}_e)| \leq 8c_1 (h_e + C)^2 \|\boldsymbol{\sigma}_e\|_W \|\boldsymbol{\tau}_e\|_W \quad (44)$$

onde $c_1 = \max\{\delta_1, \delta_2\}$. Aplicando (44) e (42) em (41) encontramos (40) com $\alpha_3 = \max\{2\|\mathbf{E}\|, 8c_1(h_e + C)^2\}$. ■

Lema 3 (A LBB discreta). Existe uma constante positiva $\beta_3 \in \mathbb{R}$ independente de ε e h tal que

$$\sup_{\boldsymbol{\tau}_h \in W_h} \frac{b(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{z}_h)}{\|\boldsymbol{\tau}_h\|_W} \geq \beta_3 \|\mathbf{z}_h\|_V \quad \forall \mathbf{z}_h \in V_h. \quad (45)$$

Prova. Todo $\tilde{\tau}_h \in W_h$ satisfaz à desigualdade

$$\sup_{\tau_h \in W_h} \frac{b(\tau_h, \mathbf{z}_h)}{\|\tau_h\|_W} \geq \frac{b(\tilde{\tau}_h, \mathbf{z}_h)}{\|\tilde{\tau}_h\|_W} \quad \forall \mathbf{z}_h \in V_h \quad (46)$$

Por (34), temos que para todo $\tilde{\tau}_h \in W_h$

$$b(\tilde{\tau}_h, \mathbf{z}_h) = (\tilde{\tau}_{\theta h}, \boldsymbol{\theta}'_h) + (\tilde{\tau}_{uh}, \mathbf{u}'_h - \boldsymbol{\theta}_h \wedge \mathbf{t}) \quad \forall \mathbf{z}_h \in V_h.$$

Escolhendo

$$\tilde{\tau}_{\theta h} = \boldsymbol{\theta}'_h \quad (47)$$

$$\tilde{\tau}_{uh} = \mathbf{u}'_h - \boldsymbol{\theta}_h \wedge \mathbf{t} \quad (48)$$

obtemos

$$b(\tilde{\tau}_h, \mathbf{z}_h) \geq \frac{1}{2} \|\mathbf{z}_h\|_V^2 \quad (49)$$

Por outro lado, usando (47), (48) e a desigualdade de Poincaré

$$\|\boldsymbol{\theta}_h(s)\|^2 \leq \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\theta}_h(s)\|_1^2 \quad (50)$$

de (19) encontramos

$$\|\tilde{\tau}_h\|_W^2 \leq \frac{3}{2} \|\mathbf{z}_h\|^2 \quad (51)$$

Aplicando (49) e (51) em (46)

$$\sup_{\tau_h \in W_h} \frac{b(\tau_h, \mathbf{z}_h)}{\|\tau_h\|_W} \geq \frac{b(\tilde{\tau}_h, \mathbf{z}_h)}{\|\tilde{\tau}_h\|_W} \geq \frac{\sqrt{6} \|\mathbf{z}_h\|}{6} \quad \forall \mathbf{z}_h \in V_h$$

demostramos (45) com $\beta_3 = \frac{\sqrt{6}}{6}$. ■

Lema 4 Para todo $\tau_{\theta h} \in Q_h$ a seguinte desigualdade é sempre satisfeita

$$h^2 \sum_{e=1}^{n_{el}} (\tau'_{\theta e}, \tau'_{\theta e}) \geq 2 \|\tau_{\theta h}^*\|^2. \quad (52)$$

Prova. Toda função $\tau_{\theta h} \in Q_h$ pode ser decomposta unicamente em

$$\tau_{\theta h} = \tau_{\theta h}^* + \bar{\tau}_{\theta h} \quad (53)$$

onde $\bar{\tau}_{\theta h}$ são funções constantes por parte e $\tau_{\theta h}^*$ funções de média nula. Definindo $\bar{\tau}_{\theta e}$ a restrição de $\bar{\tau}_{\theta h}$ a I_e por

$$\bar{\tau}_{\theta e} = \frac{1}{h_e^2} \int_0^{h_e} \tau_{\theta e}(s) ds$$

temos que $\tau_{\theta e}^*$, a restrição de $\tau_{\theta h}^*$ a I_e , satisfaz

$$\int_0^{h_e} \tau_{\theta e}^*(s) ds = 0 \quad e = 1, \dots, n_{el}.$$

Considerando $t, s \in [0, h_e]$, onde t é um ponto onde $\tau_{\theta e}^*(s)$ inverte o sinal $\tau_{\theta h}^*(t) = 0$, temos

$$|\tau_{\theta e}^*(s)| \leq \int_t^s |\tau_{\theta e}^*(\xi)| d\xi \quad (54)$$

Como $\bar{\tau}_{\theta e}$ a nível de elemento é constante, derivando (53) garantimos a identidade $\tau'_{\theta e} = \tau_{\theta e}^*$ a qual aplicando em (54) nos garante (52) ■

Lema 5 (Coercividade da forma $a_h(\cdot, \cdot)$). Existe uma constante positiva $\alpha_4 \in \mathbb{R}$ independente de ε e h tal que

$$\sup_{\tau_h \in K_h} \frac{a_h(\tau_h, \tau_h)}{\|\tau_h\|_W} \geq \alpha_4 \|\tau\|_W \quad \forall \tau_h \in K_h \quad (55)$$

onde

$$K_h = \{\tau_h \in W_h; b(\tau_h, \mathbf{z}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{z}_h \in V_h\}. \quad (56)$$

Prova. Pela definição (31 – 33) temos que

$$|a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \tau_h)| = \left| \|\mathbf{E}\| \|\tau_{\theta h}\|^2 + \varepsilon^2 \|\mathbf{D}\| \|\tau_{uh}\|^2 + \right.$$

$$\left. \sum_{e=1}^{n_{el}} \left(\delta_1 h_e^2 \|\tau'_{\theta e} - \tau_{ue} \wedge \mathbf{t}\|^2 + \delta_2 h_e^2 \|\tau'_{ue}\|^2 \right) \right|$$

eliminando a dependência com o parâmetro ε^2 e aplicando (52) obtemos

$$|a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \tau_h)| \geq \left| \|\mathbf{E}\| \|\tau_{\theta h}\|^2 - \delta_1 h_e^2 \|\tau_{uh}\|^2 + 2 \delta_2 \|\tau_{uh}^*\|^2 \right| \quad (57)$$

Todo $\tau_h \in K_h$ satisfaz

$$(\tau_{\theta h}, \boldsymbol{\theta}'_h) + (\tau_{uh}, \mathbf{u}'_h - \boldsymbol{\theta}_h \wedge \mathbf{t}) = 0 \quad \forall (\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\theta}_h) \in V_h.$$

Desde que $\bar{\tau}_{uh}$ seja constante por partes e \mathbf{u}_h e $\boldsymbol{\theta}_h$ sejam no mínimo lineares, podemos escolher

$$\mathbf{u}_h(s) = \int_0^s \bar{\tau}_{uh}(\xi) d\xi,$$

$$\boldsymbol{\theta}_h(s) = \int_0^s \frac{1}{2p} \bar{\tau}_{uh}(\xi) d\xi,$$

onde $p \in \mathbb{R}$ é um número positivo arbitrário, e usar (53) para obter

$$\frac{1}{p^2} \|\tau_{\theta h}\|^2 \geq 4 \|\bar{\tau}_{uh}\|^2 - \frac{1}{2p^2} \|\tau_{uh}\|^2. \quad (58)$$

Aplicando (58) em (57) encontramos

$$|a_h(\boldsymbol{\sigma}_h, \tau_h)| \geq \alpha_4 \|\tau_h\|^2,$$

$$\alpha_4 = \min \left\{ \|\mathbf{E}\| - \frac{\delta_2}{2p^2}, \min\{\delta_1, \delta_2\} \left(2 - \frac{1}{4p^2} - h^2 \right) \right\} \quad \blacksquare$$

Teorema 1 Para $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ o **Problema PG** tem solução única $\{\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h\}^t \in W_h \times V_h$ e vale a seguinte estimativa

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_W + \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_V \leq c (\|\boldsymbol{\sigma} - \tau_h\|_W + \|\mathbf{z} - \mathbf{w}_h\|_V) \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_h, \tau_h \in W_h \quad (59)$$

onde c é constante e independente de ε e h . Para $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}\}^t$ solução do **Problema P**, suficientemente regular resulta

$$\|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_W + \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_V \leq ch^{k+1} \|\boldsymbol{\sigma}\|_{k+1} + ch^k \|\mathbf{z}\|_{k+1} \quad (60)$$

A prova é consequência direta da continuidade de a_h (Lema 1), da LBB discreta (Lema 3), da coercividade de a_h (Lema 5), do teorema de Brezzi [3] e de resultados de teorias de interpolações de elementos finitos [4]. A equação (60) mostra que os deslocamentos e as tensões generalizadas convergem, respectivamente, com taxas ótimas e quase ótimas.

6 Experimento numérico

A fim de comprovar numericamente os resultados da análise, consideramos a geometria da linha de centróides da estrutura descrevendo uma hélice no espaço, definida pela curva $r(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{4\pi} \cos\left(\frac{s}{2\pi}\right), \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \sin\left(\frac{s}{2\pi}\right), \frac{\sqrt{2}s}{8\pi^2} \right)$, engastada em uma extremidade e livre na outra, com parâmetros geométricos e constitutivos $\kappa = \mu = \sqrt{2}\pi$, $\gamma^2 = \iota^2 = \chi^2 = \rho^2 = 1$, $\varepsilon^2 = 10^{-8}$ e sujeita a uma carga unitária $P = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{t} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{b}$ distribuída uniformemente na direção vertical.

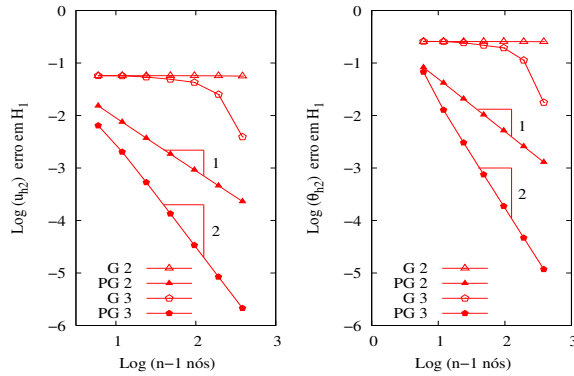


Figura 2: Estudo de convergência para u_{h2} e θ_{h2} .

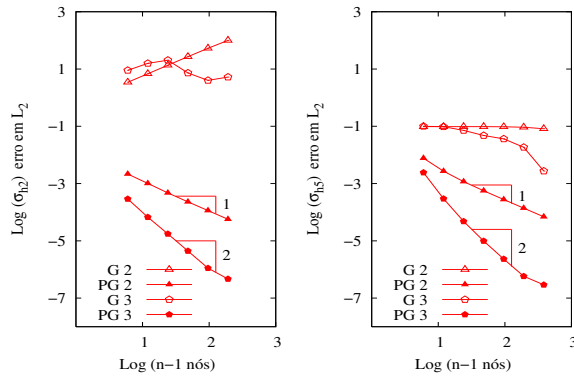


Figura 3: Estudo de convergência para σ_{h2} e σ_{h5} .

As Figuras 2 e 3 são compostas por dois gráficos que visam caracterizar a influência da adição de termos de mínimos quadrados à formulação do problema aproximado. Cada gráfico contém estudos de convergências confrontando, para o mesmo problema, a solução da formulação de Galerkin com a de Petrov-Galerkin com interpolações de mesma ordem para os campos de deslocamentos e tensões. Os elementos comparados são: (G 2) e (G 3) que representam, respectivamente, interpolações lineares e quadráticas para a formulação de Galerkin (obtida fazendo $\delta_1 = \delta_2 = 0$) e (PG 2) e (PG 3) que representam, respectivamente, interpolações lineares e quadráticas para a formulação de Petrov-Galerkin (obtida fazendo $\delta_1 = \delta_2 = 1$).

Na Figura 2 as variáveis estudadas são o des-

locamento na direção do eixo normal e a rotação em relação ao mesmo eixo. Como podemos constatar, o caso (G 2) não apresenta convergência. O caso (G 3) apresenta no final um princípio de convergência, mas com o valor do erro inaceitável para a ordem de interpolação e ainda suscetível a piora se diminuirmos ainda mais o valor de ε^2 . Em contrapartida os casos (PG 2) e (PG 3) confirmaram os resultados obtido na análise com taxa ótima (linear e quadrática, respectivamente, para interpolações lineares e quadráticas na norma W).

Na Figura 3 estudamos os esforços onde as variáveis são a tensão cisalhante na direção do eixo normal (σ_{h2}) e o momento na mesma direção (σ_{h5}). No caso (G 2) e (G 3) podemos observar que (σ_{h5}) apresenta os mesmos comportamentos do deslocamento, entretanto em (σ_{h2}) há o surgimento de oscilações fazendo com que (G 2) e (G 3) diverjam. Os casos (PG 2) e (PG 3) confirmaram os resultados obtido na análise com taxa subótima (linear e quadrática, respectivamente, para interpolações lineares e quadráticas na norma V).

Referências

- [1] D.N. Arnold, Discretization by finite elements of a model parameter dependent problem, *Numer. Math.*, 16 (1981) 405-421.
- [2] K. Arunakirinathar, B.D. Reddy: Mixed Finite Element method for elastic rods of arbitrary geometry, *Numer. Math.*, 64 (1993) 13-43.
- [3] F. Brezzi, On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers, *RAIRO Ser. Rouge Anal. Numér.*, 8 (1974) 129-151.
- [4] P.G. Ciarlet, The finite elements of elliptic problem, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [5] A.F.D. Loula, L.P. Franca, J.R. Hughes, I. Miranda: Stability, convergence and accuracy of a new finite element method for the circular arch problem, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 63 (1978) 281-303.
- [6] A.F.D. Loula, J.R. Hughes, L.P. Franca, J.R. Hughes, I. Miranda: Mixed Petrov-Galerkin Methods for Timoshenko beam problem, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 63 (1978) 133-154.
- [7] B.D. Reddy, Convergence of mixed Finite Element method approximation for the shallow arch problem, *Numer. Math.*, 53 (1988) 687-699.
- [8] B.D. Reddy, M.B. Volpi: Mixed finite element method for the arch problem, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 97 (1992) 125-145.