Existência, unicidade, comportamento assintótico e análise numérica da equação de onda com termo de memória na fronteira

Prof°. Dr. João dos Santos Protázio[*], **Carlos Alessandro da C. Baldez**[†],

Prof°. Dr. Mauro Lima Santos[‡], **Prof°. Dr. Jorge Ferreira**[§],

Departamento de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, UFPA,

66075-110, Belém-Pa

cbaldez2000@yahoo.br, protazio@ufpa.br, ls@ufpa.br, jferreira@bs2.br

1 Introdução

Neste trabalho será discutido a solvabilidade, comportamento assintótico e análise numérica da seguinte equação.

$$
\left|\begin{array}{l}
u_{tt}(x,t) - \mu(t)u_{xx}(x,t) = 0 \ \forall \ (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\
u(0,t) = 0, \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+ \\
u(1,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\mu(s)u_x(1,s)ds = 0, \\
u(x,0) = u_0(x), \ \ u_t(x,0) = u_1(x) \quad \forall x \in (0,1).
\end{array}\right. \tag{1.1}
$$

A integral em (1.1) é a condição de fronteira que inclui o efeito de memória que do ponto de vista físico representa o efeito causado pelo contato da extremidade $x = 1$ com algum material viscolelástico. A função u denotará a amplitude da onda e g, a função de relaxamento. A função $\mu(t)$ representa a raiz quadrada da velocidade de propagação da onda e é uma função de $W^{1,\infty}_{loc}(0,\infty;\mathbb{R})$, satisfazendo $\mu(t) \geq \mu_0 > 0$ e $\mu'(t) \leq 0$ para todo $t \geq 0$.

Em [1] Ciarletta estabeleceu teoremas de existência, unicidade e estabilidade assintótica para o modelo linear da condução do calor. Neste caso, a condição de memória descreve uma fronteira que pode absorver calor e reter parte dele. Em [3] Fabrizio & Morro consideraram um modelo eletromagnético linear como condição de fronteira tipo memória e mostraram existência, unicidade e comportamento assintótico da solução. Rivera & Andrade [2] consideraram uma equação da onda não linear com uma condição de fronteira viscoelástico, sendo provada a existência e unicidade de solução forte global para pequenas pertubações ou seja, com condições iniciais (u_0, u_1) com normas pequenas em $H^2 \times H^1$.

[*] PPGEM/UFPA & ESMAC

[†] Aluno do PPGEM

[‡] PPGEM/UFPA.

[§] UFSJ-Dep. de Mat. Est. e C. da computação

2 Existência e Regularidade

A seguir será enunciado o teorema referente a existência da solução dos sistema (1.1). Para isso, será necessário algumas notações. Denotamos por V o espaço de Hilbert

$$V = \{v \in H^1(0,1); v(0) = 0\}$$

com a norma

$$\|v\| = \Big(\int_0^1 |\frac{dv}{dx}|^2 dx\Big)^{1/2}.$$

Essa norma é equivalente à norma em $H^1(0,1)$. E, $\mathcal{D}(\Omega)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis, com suporte em $\overline{\Omega}$, sendo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.1 *Seja* $(u_0, u_1) \in V \times L^2(0,1)$, *então existe uma única solução de* (1.1) *satisfazendo*

$$u \in C([0,T];V) \cap C^1([0,T];L^2(0,1)).$$

Além disso, se $(u_0, u_1) \in H^2(0,1) \cap V \times V$ *e satisfaz a condição de compatibilidade*

$$\mu(0)u_{0,x}(1) = -\tau u_1(1),$$

então, $u \in C([0,T];H^2(0,1) \cap V) \cap C^1([0,T];V)$.

Demonstração:
Existência- A demonstração é baseada no método de aproximação de Faedo-Galerkin. Seja $(u_0, u_1) \in [H^2(0,1) \cap V] \times V$ satisfazendo a condição de compatibilidade. Seja $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ uma base de $V \cap H^2(0,1)$ a qual é ortonormal em V, e por V_m representa-se o subespaço gerado pelos m primeiros vetores dessa base.

$$V_m = [w_1, w_2, \ldots, w_m]$$

Procura-se funções $u^m(t) \in V_m$, tais que

$$u^m(t) = \sum_{i=1}^{m} h_{im}(t)w_j$$

O problema aproximado é dado pela seguinte equação:

$$\left|\begin{array}{l}(u_{tt}^m, w_i) + \mu(t)((u^m, w_i)) \ = \\ -\tau\{u_t^m(1,t) + k(0)u^m(1,t) - k(t)u_0^m(1) + \\ k * u^m(1,t)\}w_i(1) \\ u_0^m = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i0} w_i \ \ , \ \ u_1^m = \sum_{i0} \beta_{i0} w_i\end{array}\right.$$

sendo que,

$$\left|\begin{array}{lll}u_0^m \longrightarrow u_0, & \text{forte em} & V \cap H^2(0,1), \\ u_1^m \longrightarrow u_1, & \text{forte em} & V.\end{array}\right.$$

Assim, obtém-se um sistema de equações diferenciais ordinárias, o qual tem uma solução em um intervalo $[0, t_m)$.

Estimativa a priori I- Substituindo v por $u^m(t)$ e usando as propriedades das funções k e μ, otemos:

$$\begin{array}{lll}(u^m) & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;V) \\ (u_t^m) & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;L^2(0,1))\end{array}$$

Estimativa a priori II- O objetivo é estimar o termo $\displaystyle\int_0^1 |u_{tt}^m|^2$. Para isso, primeiramente, estima-se o termo $\displaystyle\int_0^1 |u_{tt}^m(0)|^2$. Fazendo $t \to 0$, segue

$$|u_{tt}^m(0)|_{L^2}^2 - \mu(0)(u_{xx}^m(0)u_{tt}^m(0)) +$$

$$\mu(0)u_{0,x}^m(1)u_{tt}^m(1,0) = \{-\tau u_1^m(1) - \tau k(0)u_0^m(1)$$

$$u_{tt}^m(1,0) + \tau k(0)u_0^m(1)\}u_{tt}^m(1,0)$$

usando a equação de compatibilidade e a desigualdade de Cauchy-Schwarz, vem que

$$|u_{tt}^m(0)|_{L^2} \leq M$$

Diferenciando o problema aproximado e substituindo v por u_{tt}^m, obtém-se:

$$\left|\begin{array}{lll}(u^m) & \text{limitada em} & L^\infty(0,T;V) \\ (u_t^m) & \text{limitada em} & L^\infty(0,T;L^2(1,0)) \\ (u_{xt}^m) & \text{limitada em} & L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \\ (u_{tt}^m) & \text{limitada em} & L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \\ (u_t^m(1,t)) & \text{limitada em} & L^2(0,T)\end{array}\right.$$

Pelo Teorema de Banach-Bourbaki existe uma subsequência que representa-se por u^m, tal que

$$\left|\begin{array}{lll}u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em} & L^\infty(0,T;V) \\ u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t & \text{em} & L^\infty(0,T;V) \\ u_{tt}^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_{tt} & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \\ u_t^m(1,t) \rightharpoonup u_t(1,t) & \text{em} & L^2(0,T).\end{array}\right.$$

Além disso, segue das convergências acima que $u \in C(0,T;V)$ e $u_t \in C(0,T;L^2(0,1))$. Daí segue, que

$$\int_0^T \{(u_{tt}, v) + \mu(t)((u,v)) + \tau[u_t(1,t)k(0)u(1,t)$$

$$-k(t)u_0(1) + k' * u(1,t)]v(1)\}\theta dt = 0$$

para todo $v \in V_m$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Como V_m é denso em $V \cap H^2(0,1)$ a igualdade acima é válida para todo $v \in V \cap H^2(0,1)$. Considera-se $v \in \mathcal{D}(0,1) \subset V \cap H^2(0,1)$, resulta que:

$$\int_Q [u_{tt} - \mu(t)u_{xx}]\, v\theta dx = 0 \ \forall\, v \in \mathcal{D}(0,1),\ \theta \in \mathcal{D}(0,T)$$

sendo $Q = (0,1) \times (0,T)$. Como o conjunto das combinações lineares $v\theta$ é total em $\mathcal{D}(Q)$ segue que a igualdade acima é válida para toda $\psi \in \mathcal{D}(Q)$, ou seja.

$$\int_Q (u_{tt} - \mu(t)u_{xx})\psi dx = 0 \ \ \forall \psi \in \mathcal{D}(Q)$$

Em termos de distribuições, temos:

$$< u_{tt} - \mu(t)u_{xx}, \psi >= 0 \ \ \forall \psi \in \mathcal{D}(Q)$$

Como $u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2(0,1))$ segue que $u_{xx} \in L^\infty(0,T;L^2(0,1))$. Desta forma, tem-se

$$u_{tt} - \mu(t)u_{xx} = 0 \ \ q.s \ em \ Q$$

Multiplicando a igualdade acima por $v\theta$ com $v \in V \cap H^2(0,1)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e, integrando em Q, resulta que

$$\int_0^T \{[\mu(t)u_x(1,t) + \tau(u_t(1,t) + k * u_t(1,t))]v(1)\}\theta dt = 0$$

$\forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Pelo lema de DuBois-Reymond segue que

$$\{\mu(t)u_x(1,t) + \tau[u_t(1,t) + k * u_t(1,t)]\}v(1) = 0$$

tomando $v(x) = x$ segue que

$$\mu(t)u_x(1,t) = -\tau\{u_t(1,t) + k * u_t(1,t)\}$$

usando o operador inverso de Volterra vem que

$$u(1,t) + \int_0^t g(t-s)\mu(s)u_x(1,s)ds = 0 \ \ \forall t \in (0,T)$$

Por argumentos *standart* demonstra-se que a função u satisfaz as condições iniciais.

Assim, fica mostrada a existência da solução de (1.1).

Unicidade- Para unicidade da solução usa-se o método da energia. Supõe-se, inicialmente, que existam duas funções $u,\ v$ soluções de (1.1). Desta forma, a função $w = u - v$ é solução da seguinte equação.

$$\left|\begin{array}{l}w_{tt} - \mu(t)w_{xx} = 0 \text{ em } (0,1) \times (0,\infty) \\ w(0,t) = 0, \\ w(1,t) + \int_0^t g(t-s)\mu(s)w_x(1,s)ds = 0, \forall t > 0 \\ w(x,0) = 0, \ \ w_t(x,0) = 0 \text{ em } (0,1)\end{array}\right.$$

Multiplicando a primeira equação por w_t, integrando em $(0,1)$ e, usando as condições iniciais segue a seguinte igualdade.

$$|w_t|^2_{L^2} + \mu(t)|w_x|^2_{L^2} + \tau(k(t)|w(1,t)|^2 - k'u(1,t)) = 0$$

ou seja, $|w|_{L^2} = 0$ donde segue que $w = 0$. Daí, vem que

$$u = v$$

Existência de solução fraca- Para isso, será usado o argumento de densidade. Seja $(u_0, u_1) \in V \times L^2(0,1)$. Desta forma existe $(u_0^m, u_1^m) \in [V \cap H^2(0,1)] \times V$ tal que:

$$\left| \begin{array}{ll} u_0^m \to u_0 & \text{forte em } V \\ u_1^m \to u_1 & \text{forte em } L^2(0,1). \end{array} \right.$$

Assim, obtém-se uma sequência (u_m) de soluções (1.1) satisfazendo:

$$\left| \begin{array}{lll} (u^m) & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;V) \\ (u_t^m) & \text{é limitada em} & L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \\ (u_t^m(1,t)) & \text{é limitada em} & L^2(0,T) \end{array} \right.$$

Desta forma, existe uma subsequência, representada ainda por (u^m), satisfazendo:

$$\left| \begin{array}{lll} u^m \overset{*}{\rightharpoonup} u & \text{em} & L^\infty(0,T;V) \\ u_t^m \overset{*}{\rightharpoonup} u_t & \text{em} & L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \\ u_t^m(1,t) \rightharpoonup u_t(1,t) & \text{em} & L^2(0,T) \end{array} \right.$$

Daí usa-se alguns lemas da compacidade e os Teoremas: Convergência Dominada de Lebesgue e Aubin-Lions. Desta forma, temos:

$$\left| \begin{array}{l} -\displaystyle\int_0^T (u_t, v)\theta' dt + \int_0^T \mu(t)((u,v))\theta dt + \\ \tau \displaystyle\int_0^T \{u_t(1,t) + k(0)u(1,t) - k(t)u_0(1) + \\ k' * u(1,t)\} v(1)\theta dt = 0 \end{array} \right.$$

Além disso, para u, tem-se

$$u(1,t) + \int_0^t g(t-s)\mu(s)u_x(1,s)ds = 0.$$

As condições iniciais também são satisfeitas por u. Mostrando assim, a existência da solução fraca de (1.1).

Unicidade- Para a demonstração da unicidade será usado o método de Visik-Ladyzhenskaya. Supõe-se que u_1, u_2 seja soluções de (1.1). Considera-se a função $w(t) = u_1(t) - u_2(t)$ com condições iniciais.

$$w(0) = 0, \quad w_t(0) = 0.$$

E a seguinte função

$$\psi(t) = \left| \begin{array}{lll} -\displaystyle\int_t^s w(\sigma)d\sigma, & \textit{para} & 0 \le t \le s \\ 0\,, & \textit{para} & s \le t \le T \end{array} \right.$$

Pela regularidade de w segue que $\psi \in L^2(0,T;V)$. Definindo $w_1(\xi) = \displaystyle\int_0^\xi w(\tau)d\tau$, obtém-se:

$$\psi(t) = w_1(t) - w_1(s)$$

Usando estimativas convenientes mostra-se

$$w = 0 \quad \forall t \ \in \ [0,T]$$

Donde segue a unicidade da solução.

3 Análise Assintótica

No estudo do decaimento exponencial e polinomial nosso resultado está resumido nos dois teoremas a seguir.
Para a demonstração do decaimento exponencialda solução considera-se a seguinte hipótese, sobre o núcleo resolvente k :

$$\begin{gathered} 0 < k(t) \le b_0 e^{-\gamma_0 t}, \\ -b_1 k(t) \le k'(t) \le -b_2 k(t), \qquad (3.1) \\ -b_3 k'(t) \le k''(t) \le -b_4 k'(t). \end{gathered}$$

Sendo $b_i, \ i = 0,1,\dots,4$, e γ_0 algumas constantes positivas.

Teorema 3.1 *Considere* $(u_0, u_1) \in V \times L^2(0,1)$ *e que o núcleo resolvente* k *satisfaça* (3.1). *Então, existem constantes positivas* α_1 *e* γ_2 *tal que*

$$E(t) \le \alpha_1 e^{-\gamma_2 t} E(0), \quad \forall t \ge 0.$$

Demonstração: Ver [4].

Para o decaimento polinomial considera-se as seguintes hipóteses

$$\begin{gathered} 0 < k(t) \le b_0 (1+t)^{-p}, \\ -b_1 k(t)^{\frac{p+1}{p}} \quad \le \quad k'(t) \le -b_2 k(t)^{\frac{p+1}{p}}, \qquad (3.2) \\ -b_3 k'(t)^{\frac{p+2}{p+1}} \le k''(t) \le -b_4 k'(t)^{\frac{p+2}{p+1}} \end{gathered}$$

sendo $p > 1$ e $b_i, \ i = 0,1,\dots,4$, são constantes positivas.

Teorema 3.2 *Sejam* $(u_0, u_1) \in V \times L^2(0,1)$ *e que o núcleo resolvente* k *satisfaça* (3.2). *Então, existe uma constante positiva* c *tal que*

$$E(t) \le \frac{c}{(1+t)^{p+1}} E(0)$$

Demonstração: Ver [4].

4 Análise Numérica

Nesta seção será feita a análise numérica para a obtenção da solução numérica de (1.1). Para isso será usado o método de elementos finitos. Em termos de notação usa-se $\cdot = \dfrac{d}{dt}$ e $' = \dfrac{d}{dx}$. Desta forma (1.1) torna-se.

$$\left|\begin{array}{l} \ddot{u}(x,t) - \mu(t)u''(x,t) = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\mu(s)u'(1,s)ds = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad \dot{u}(x,0) = u_1(x) \end{array}\right.$$

O método de Galerkin consiste em encontrar uma solução para o problema aproximado e fazer a passagem ao limite para isso multiplica-se a equação por $v(x) \in V$ e integra-se em (0,1).

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \ddot{u}(x,t)x(x)\ dx - \mu(t)\int_0^1 u''(x,t)v(x)\ dx = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\mu(s)u'(1,s)ds = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 u(x,0)v(x)\ dx = \int_0^1 u_0(x)v(x)\ dx \\ \displaystyle\int_0^1 \dot{u}(x,0)v(x)\ dx = \int_0^1 u_1(x)v(x)\ dx \end{array}\right.$$

Integrando segue que

$$\left|\begin{array}{l} \displaystyle\int_0^1 \ddot{u}(x,t)x(x)\ dx - \mu(t)u'(1,t)v(1) + \\ \mu(t)\displaystyle\int_0^1 u'(x,t)v(x)\ dx = 0 \\ u(0,t) = 0 \\ u(1,t) + \displaystyle\int_0^t g(t-s)\mu(s)u'(1,s)ds = 0 \\ \displaystyle\int_0^1 u(x,0)v(x)\ dx = \int_0^1 u_0(x)v(x)\ dx \\ \displaystyle\int_0^1 \dot{u}(x,0)v(x)\ dx = \int_0^1 u_1(x)v(x)\ dx. \end{array}\right.$$

Seja $V_m = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N, \varphi_{N+1}\} \subset V$ os $N+1$ vetores de uma base de V. Considera-se $v(x) = \varphi_k(x)$

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{N+1} u_j(t)\varphi_j(t).$$

Substituindo no sistema acima, obtém-se:

$$\left|\begin{array}{lcl} \underline{U}(t) & = & [u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t), u_{N+1}(t)]^T \\ A_{jk} & = & \displaystyle\int_0^1 \varphi_j(x)\varphi_k(x)\ dx \\ B_{jk} & = & \displaystyle\int_0^1 \varphi_j'(x)\varphi_k'(x)\ dx \\ C_{jk} & = & \varphi'(1)\varphi_k(1) \\ a_j & = & \varphi_j(1) \\ b_k & = & \varphi_k'(1) \\ c_k & = & \displaystyle\int_0^1 \varphi_0(x)\varphi_k(x)\ dx \\ d_k & = & \displaystyle\int_0^1 \varphi_1(x)\varphi_k(x)\ dx \end{array}\right.$$

Desta forma nosso sistema torna-se:

$$\left|\begin{array}{l} \underline{\underline{A}}\ \underline{\ddot{U}}(t) + \mu(t)\underline{\underline{B}}\ \underline{U}(t) - \mu(t)\underline{\underline{C}}\ \underline{U}(t) = 0 \\ \underline{a}^T\underline{U}(t) + \underline{b}^T\displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\mu(\tau)\underline{U}(\tau)\ d\tau = 0 \\ \underline{\underline{A}}\ \underline{U}(0) = \underline{c} \quad ; \qquad \underline{\underline{A}}\ \underline{\dot{U}}(0) = \underline{d} \end{array}\right.$$

Multiplicando a segunda equação acima por $\underline{b}$ e notando que $\underline{\underline{C}} = \underline{b}\ \underline{a}^T$ resulta em

$$\underline{\underline{C}}\ \underline{U}(t) + \underline{\underline{D}}\int_0^t g(t-\tau)\mu(\tau)\underline{U}(\tau)\ d\tau = 0$$

sendo $\underline{\underline{D}} = \underline{b}\ \underline{b}^T$ Substituindo na equação acima, obtém-se:

$$\left|\begin{array}{l} \underline{\underline{A}}\ \underline{\ddot{U}}(t) + \mu(t)[\underline{\underline{B}}\ \underline{U}(t) + \underline{\underline{D}}\displaystyle\int_0^t g(t-\tau)\mu(\tau)\underline{U}(\tau)d\tau] \\ =0 \\ \underline{U}(0) = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{c} \\ \underline{\dot{U}}(0) = \underline{\underline{A}}^{-1}\underline{d} \end{array}\right.$$

Referências

[1] Ciarletta, M., a differential problem for heat equation with a boundary condition with memory.Appl.Math.Lett.,10(1),95-191(1997).

[2] Andrade, D. & Rivera, J.E.M.,Exponential decay of nonlinear wave equation with viscoelastic boundary condition, Math. Meth. Appl. Sci. ,23, 41-61 (2000).

[3] Fabrizio, M. & Morro, M., A boundary condition with memory in Electromagnetism. Arch. Rational Mech. Anal., 136, 359-381 (1996).

[4] Santos, M.L., Asyntoptic Behavior of solutions to wave equations with a memory condition at the boundary, Eletronic Journal Differential Equation, Vol. 2001, N° 73, pp 1-11.