Otimização de Redes de Distribuição de Água com Bombeamento

Francisco Assis Magalhães Gomes Neto
Dep. de Matemática Aplicada, IMECC, UNICAMP
13081-970, Campinas, SP
E-mail: chico@ime.unicamp.br

Carlos Henrique Dias*
Inst. de Mat. Estatística e Comp. Científica, IMECC, UNICAMP
13081-970, Campinas, SP
E-mail: c010117@dac.unicamp.br.

Uma rede de distribuição de água é composta por um conjunto de canos que interligam nós, os quais representam consumidores (casas, indústrias, etc.) e fornecedores de água (caixas d'água, estações de tratamento, etc.). Em um problema de otimização de redes de distribuição, a disposição dos canos é conhecida e tem-se como objetivo a determinação dos diâmetros de modo a minimizar o custo de implantação da rede, mantendo a pressão nos nós acima de um determinado limite e satisfazendo a demanda dos consumidores. Bombas d'água podem ser introduzidas no sistema para garantir a pressão mínima na rede. Este problema é difícil de resolver porque alguns poucos diâmetros de canos estão disponíveis comercialmente, de modo que as variáveis do problema são inteiras.

Equações das redes de distribuição.

Fixando-se os diâmetros dos canos e supondo conhecidas as características das bombas, pode-se determinar o fluxo de água em uma rede com *m* canos (ou arcos) e *n* nós (ou junções) através da resolução de um sistema não linear com *m*+*n* equações. As variáveis do problema são as perdas de carga, *H*, nos canos e as vazões, *Q*, nos nós, conforme descrito abaixo.

Continuidade da vazão nos nós.

Supondo um fluxo constante e incompressível em uma rede, a soma algébrica do fluxo de água que entra e que sai de um nó *j* deve ser zero, ou seja,

$$\sum_{x=1}^{m_j} a_x q_x = Q_j, \quad j = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

onde m_j é o número de arcos conectados ao nó *j*, q_x é a vazão no cano *x*, conectado ao nó *j*, Q_j é a vazão externa (de suprimento ou demanda) do nó *j*, e a_x é igual a 1 ou -1, dependendo do sentido do fluxo no cano *x*.

Perda de carga em canos.

Quando um fluido atravessa um cano, parte da energia total é convertida em energia térmica devido ao atrito interno e à turbulência. Para um cano *x*, que conecta os nós *i* e *j* da rede, esta perda de energia, que chamamos de perda de carga, é expressa por:

$$H_x = h_i - h_j = R_x q_x |q_x|^{0.852}, x = 1, \ldots, m \ , \qquad (2)$$

onde H_x é a perda de carga no cano, h_i, h_j são os valores das cargas nos nós *i* e *j*, q_x é a vazão no cano, supondo o fluxo de *i* a *j* e R_x é a resistência do cano, dada em função de seu comprimento e diâmetro.

Método de Hansen, Madsen e Nielsen.

Um método eficiente para resolver o problema de otimização de redes sem bombas foi proposto por Hansen, Madsen e Nielsen (HMN) [*2*] em 1991. Este método está baseado na programação linear seqüencial com regiões de confiança do tipo caixa.

Os diâmetros, $D_i, i = 1, \ldots, m$, são tratados como variáveis reais e, ao final de cada iteração, são arredondados para os valores comerciais, garantindo-se que a carga nos nós esteja acima dos valores mínimos estipulados.

Os valores das vazões e das perdas de carga são obtidos resolvendo-se o sistema (1)-(2) para um conjunto de diâmetros fixos.

O custo de uma rede na qual os canos têm comprimento $L_1, \ldots, L_m$ e diâmetros $D_1, \ldots, D_m$ é dado por:

$$F(D) = \sum_{i=1}^{m} L_i \$(D_i) \ , \qquad (3)$$

onde $\$(D_i)$ é o custo por metro de cano com diâmetro D_i.

Podemos, agora, formular o problema de minimização. Como o vetor de carga *h* é obtido a partir do vetor de diâmetros ***D***, escrevemos $h_j = h_j(\boldsymbol{D})$. Assim, temos:

$$\underset{D}{Minimizar} \qquad F(\boldsymbol{D})$$
$$s.a: h_j(\boldsymbol{D}) \geq h_j^{\min}, \ \ j = 1, \ldots, n,$$

onde os componentes de ***D*** devem corresponder somente aos valores de diâmetros tabelados (diâmetros fornecidos comercialmente) e $h_j^{\min}$ é o valor mínimo de carga admitido no nó *j*.

A linearização do problema acima, incluindo uma região de confiança em forma de caixa, pode ser

*Bolsista de Iniciação Científica FAPESP

escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\underset{\Delta D}{Min} && L(D+\Delta D) \equiv a^T \Delta D + b \\ &s.\,a && h'_j(D)^T \Delta D + h_j(D) \ge h_j^{\min} \\ &&& D_i^{anterior} \le D_i + \Delta D_i \le D_i^{próximo} \\ &&& j=1,\dots,n \ e \ i=1,\dots,m. \end{aligned} \quad (4)$$

O algoritmo do método de Hansen, Madsen e Nielsen, é resumido abaixo:

Algoritmo HMN.

Entrada dos diâmetros *D;*
Ajustar os diâmetros *D;*
$F_{atual} = F(D);$ {equação(3)}
Parar = falso*;*
Enquanto *Parar* = falso*,*
  Obter ΔD resolvendo (4) com D fixo;
  Obter D_{novo} ajustando $D + \Delta D$;
  $F_{novo} = F(D_{novo});$ {equação(3)}
  Se $F_{novo} < F_{atual}$,
    Atualizar $D = D_{novo}$ e $F_{atual} = F_{novo}$ *;*
  Senão *Parar* = verdadeiro;
Fim

Como se observa, o algoritmo só termina quando a nova solução (F_{novo}) for pior que a atual (F_{atual}).

Redes com bombas.

A implantação de bombas em redes de distribuição de água tem grande importância na manutenção e no aumento das cargas nos nós de demanda, sendo amplamente utilizada em redes onde os nós fontes (caixas d'água) não atendem toda a demanda por carga ou quando a topografia exige que se transporte água a pontos elevados.

O objetivo de nosso modelo com bombas será determinar os diâmetros dos canos da rede e as cargas de fornecimento das bombas de modo a minimizar os custos.

Resumimos abaixo as adaptações que precisam ser feitas no modelo anterior, para a inclusão de bombas.

Introduzindo bombas no modelo.

Na modelagem das redes de distribuição de água com bombas, consideramos que:

- Cada bomba será modelada através da criação de um arco de comprimento nulo que liga dois nós, como ilustrado na Figura 1. Os dois nós possuirão demanda externa igual a zero;

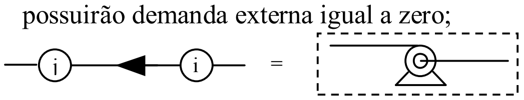

Figura 1.

- O ganho de carga do nó i ao j será a carga fornecida pela bomba;
- As vazões das bombas, assim como o sentido do fluxo da água nestas, serão sempre constantes.

Ganho de carga nas bombas.

A perda de carga em um cano comum continuará sendo expressa pela equação (2). Já para um arco y (de comprimento nulo) com bomba, a variação da carga é dada por:

$$h_i - h_j = -h_{e_y}, \ y = 1,\dots,Y, \quad (5)$$

onde i e j são os índices dos nós ligados pelo arco y, h_{e_y} representa o ganho de carga fornecida pela bomba e Y é o número de arcos que contêm bombas. O termo do lado direito tem sinal negativo, indicando que a carga aumenta de i para j,

Continuidade da vazão nos nós.

A equação da continuidade da vazão nos nós continua sendo expressa por (1) para os nós nos quais não incide um arco com bomba.

No caso do nó j pertencer a um conjunto bomba, devemos ter uma demanda externa nula, de modo que a equação da continuidade e vazão no nó se resume a

$$\sum_{x=1}^{m_j} a_x q_x = 0\,. \quad (6)$$

Adaptação do método HMN.

Como já descrito, o ***Método de Hansen, Madsen e Nielsen*** é um método iterativo que lineariza a função objetivo e as restrições, resolvendo sucessivos problemas de programação linear.

Em sua formulação original, este método não considera a utilização de bombas. Entretanto, a partir da proposta de Kessler e Shamir [3], propomos abaixo uma adaptação do modelo para otimizar redes de distribuição de água com bombas.

Formulação do Problema.

Para a formulação do problema, assumiremos uma rede de distribuição de água com m canos, n nós consumidores, r nós de suprimento e ne bombas. Os nós consumidores serão numerados de 1 a n, os nós fontes serão numerados de $n+1$ a $n+r$, os canos serão numerados de 1 a m e as bombas serão numeradas de

m+1 a m+ne.

Se as vazões nas bombas são desconhecidas, o problema admite infinitas soluções ótimas. Deste modo, supomos que são dadas as vazões nas bombas, $q_{m+1}, \ldots, q_{m+ne}$. Com isso, somente os diâmetros dos canos originais da rede, $D_1, \ldots, D_m$, e os valores de carga $h_{e_{m+1}}, \ldots, h_{e_{m+ne}}$ de cada bomba são variáveis a serem determinadas.

Determinação das vazões nos canos e das cargas nos nós.

Para um dado conjunto de valores de diâmetros e de carga nas bombas, é possível determinar as vazões nos canos, $q_1, \ldots, q_m$, e as cargas nos nós consumidores, $h_1, \ldots, h_n$, bastando, para isso, resolver o sistema não linear que envolve as equações da perda de carga nos canos (2), do ganho de carga nas bombas (5) e de continuidade (1) e (6). Esse sistema é resumido abaixo, considerando-se que a perda de carga é dada pela fórmula de Hazen-Williams:

$$\frac{10{,}68L_i}{C_{HWi}^{1{,}852} D_i^{4{,}87}} q_i |q_i|^{0.852} - (h_y - h_z) = 0,$$
$$i = 1, \ldots, m, \quad y, z \in \{1, \ldots, n + 2ne\} \qquad , \qquad (7)$$
$$-h_{e_i} - (h_y - h_z) = 0, \; i = m+1, \ldots, m+ne$$
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} q_i = \widetilde{Q}_j, \; j = 1, \ldots, n + 2ne$$

onde

$$\widetilde{Q}_j = \begin{cases} Q_j & se \;\; j = 1, \ldots, n; \\ 0 & se \;\; j = n+1, \ldots, n+2ne; \end{cases}$$

e

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & se\; j\; está\; a\; montante\; de\; i; \\ 1 & se\; j\; está\; a\; jusante\; de\; i; \\ 0 & se\; não\; há\; arco\; ligando\; i\; a\; j; \end{cases}$$

Como se observa, o sinal de a_{ij} indica o sentido adotado para o fluxo, q_i, no cano.

O sistema (7) é não linear, tendo m+n+$3ne$ equações e m+n+$3ne$ incógnitas. Este sistema forma as restrições do problema e é usado para determinar q e h quando os diâmetros D_i, $i = 1, \ldots, m$, e as cargas das bombas h_{e_i}, $i = m+1, \ldots, m+ne$, têm seus valores fixados.

Definição do problema matemático.

O custo de construção de uma rede depende dos canos (diâmetro, comprimento e material) e das bombas (cargas e vazões de trabalho). Deste modo, o custo total de implantação e manutenção de uma rede é dado por:

$$F(D, h_e) = \sum_{i=1}^{m} L_i \$(D_i) + \sum_{i=m+1}^{m+ne} \left(CP_i q_i^{\gamma} h_{e_i}^{-\delta} + CHP_i q_i h_{e_i} \right), \qquad (8)$$

onde CP_i é o custo de aquisição de uma bomba e CHP_i é o custo da energia requerida para o funcionamento da bomba ao longo do horizonte de projeto.

Para cada vetor solução do nosso problema, formado pelos diâmetros dos canos e pelas cargas nas bombas, determinamos o valor de h_j, $j = 1, \ldots, n$, através do sistema (7). Desta forma, considerando que este sistema é definido de forma implícita, podemos formular o problema de minimização de redes de distribuição de água com bombas como:

$$\underset{D, h_e}{Minimizar} \quad F(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{h_e})$$
$$s.a.: h_j(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{h_e}) \geq h_j^{\min}, \; j = 1, \ldots, n + 2ne, \qquad (9)$$
$$\boldsymbol{h_{e_i}} \leq h_{e_i}^{\max}, \; i = m+1, \ldots, m+ne,$$

onde D é o vetor de diâmetros dos canos, $h_j^{\min}$ é valor mínimo de carga admitido no nó j, $j = 1, \ldots, n + 2ne$ e $h_{e_i}^{\max}$ é a carga máxima de fornecimento admitida para a bomba i, $i = m+1, \ldots, m+ne$. Naturalmente, como os canos só estão disponíveis comercialmente em alguns poucos diâmetros tabelados, D é um vetor com componentes inteiras, enquanto h_e é um vetor real.

Algoritmo adaptado para redes com bombas.

No algoritmo de *Hansen, Madsen e Nielsen*, lineariza-se a função objetivo e as restrições do modelo (9), para que seja possível resolver, a cada iteração, um problema de programação linear.

Na linearização da função objetivo, aproxima-se F em torno do ponto (D, h_e) usando-se a fórmula

$$F(D + \Delta D, h_e + \Delta h_e) \approx \Gamma(D + \Delta D, h_e + \Delta h_e)$$

onde

$$\Gamma(D + \Delta D, h_e + \Delta h_e) = a_D^T \Delta D + b_D + a_e^T \Delta h_e + b_e$$

e as constantes a_D, b_D, b_e e a_e fazem com que o modelo linear seja igual à função original no ponto (D, h_e). Estas constantes serão definidas mais à frente.

O problema (9) apresenta n+2ne restrições não lineares e ne restrições lineares, uma vez que as restrições de carga máxima de fornecimento da bomba já são lineares. Utilizando a fórmula de Taylor, podemos linearizar as restrições da seguinte forma:

$$h_j(D+\Delta D, h_e+\Delta h_e) \approx h_j'(D,h_e)^T \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta h_e \end{bmatrix} + h_j(D,h_e),$$
$j = 1,\ldots,n+2ne.$

Deste modo, o problema (9) é aproximado por:

$$\begin{aligned} &\underset{\Delta D,\Delta h_e}{Min}\ \Gamma(D+\Delta D, h_e+\Delta h_e) = a_D^T \Delta D + a_e^T \Delta h_e \\ &s.a.: h_j'(D,h_e)^T \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta h_e \end{bmatrix} + h_j(D,,h_e) \geq h_j^{\min}, \qquad (10) \\ &h_{e_i} \leq h_{e_i}^{\max},\ i = m+1,\ldots,m+ne, \end{aligned}$$

De uma forma geral, o algoritmo resolve, a cada iteração, este problema de programação linear e usa as soluções $D+\Delta D$ e $h_e+\Delta h_e$ como estimativas para os diâmetros e cargas nas bombas na iteração seguinte.

Entretanto, os diâmetros só podem assumir valores tabelados ($DIAM_k$, k = 1,... ,s), e o problema de programação linear (10) considera que os valores dos diâmetros como contínuos. Para contornar isto, após a resolução de (10) , ajustamos $D+\Delta D$ para os valores tabelados dos canos, $DIAM_k$, k = 1,... ,s, com o cuidado de manter sempre as cargas nos nós acima dos limites mínimos.

No caso das cargas das bombas, admitimos soluções contínuas, ou seja, $h_e+\Delta h_e$ não precisa ser ajustado após a resolução de (10). Por outro lado, pode-se ajustar a carga em uma bomba caso alguma restrição de (10) esteja infactível e seja mais barato aumentar esta carga que variar o diâmetro de algum cano. Estes ajustes estão descritos no algoritmo 2 (Ajuste de cargas e diâmetros).

Como o modelo linear que usamos para aproximar o problema original não é confiável para diâmetros de canos e cargas nas bombas muito diferentes dos valores usados na fórmula de Taylor, adotamos uma *região de confiança* para *D* e h_e. Esta região de confiança é definida como se segue.

- **Diâmetros**: Seguindo o que foi proposto por *Hansen Madsen e Nielsen*, e tomando os valores dos diâmetros tabelados ordenados ($DIAM_1 < DIAM_2 < \ldots < DIAM_s$), podemos montar a seguinte restrição:

$$D_i^{anterior} \leq D_i + \Delta D_i \leq D_i^{próximo},\ i = 1,\ldots,m, \qquad (11)$$

onde,

$$\begin{aligned} &D_i = DIAM_k,\ k = 1,\ldots,s \\ &D_i^{anterior} = DIAM_v,\ v = \max\{k-1,1\} \\ &D_i^{próximo} = DIAM_u,\ u = \min\{k+1,s\} \end{aligned}$$

- **Cargas das bombas**: Neste caso, admitimos que a variação máxima, ε_i , e mínima, $-\varepsilon_i$, de carga é um dado de entrada que deve ser estimado para cada tipo de problema. Desta forma, temos:

$$-\varepsilon_i \leq \Delta h_i \leq \varepsilon_i, \quad i = m+1,\ldots,m+ne, \qquad (12)$$

Reescrevendo o problema (10), com as restrições (11) e (12), obtemos:

$$\begin{aligned} &\underset{\Delta D,\Delta h_e}{Min}\ \Gamma(D+\Delta D, h_e+\Delta h_e) = a_D^T \Delta D + + a_e^T \Delta h_e \\ &s.a: h_j'(D,h_e)^T \begin{bmatrix} \Delta D \\ \Delta h_e \end{bmatrix} + h_j(D,,h_e) \geq h_j^{\min} \\ &\qquad j = 1,\ldots,n+2ne; \qquad (13) \\ &D_i^{anterior} \leq D_i + \Delta D_i \leq D_i^{próximo}, \\ &\qquad i = 1,\ldots,m; \\ &\left.\begin{aligned} &\mathrm{h}_{e_i} \leq h_{e_i}^{\max} \\ &-\varepsilon_i \leq \Delta h_i \leq \varepsilon_i, \end{aligned}\right\} i = m+1,\ldots,m+ne. \end{aligned}$$

O problema acima tem $m+ne$ variáveis e $2m+n+5ne$ restrições.

Função custo linearizada.

Podemos escrever a função Γ como:

$$\Gamma(D+\Delta D, h_e+\Delta h_e) = \Gamma_D(D+\Delta D) + \Gamma_e(h_e+\Delta h_e)$$

onde

$$\Gamma_D(D+\Delta D) = \sum_{i=1}^{m} \left[a_{D_i}(D_i+\Delta D_i) + c_{D_i} \right]$$

$$\Gamma_e(h_e+\Delta h_e) = \sum_{i=m+1}^{m+ne} \left[a_{e_i}(h_{e_i}+\Delta h_{e_i}) + c_{e_i} \right]$$

Para o termo relacionado aos diâmetros, $\Gamma_D(D+\Delta D)$, como estamos considerando o intervalo $D_i^{anterior} \leq D_i + \Delta D_i \leq D_i^{próximo}$ (restrição (11)), definimos a_{D_i} e c_{D_i} como os coeficientes angular e linear, respectivamente, da reta ajustada aos pontos $P_{1D}(D_i^{anterior}, L_i\$(D_i^{anterior}))$, $P_{2D} = (D_i, L_i\$(D_i))$ e $P_{3D} = (D_i^{próximo}, L_i\$(D_i^{próximo}))$.

Para calcular o custo aproximado das bombas, $\Gamma_e(h_e+\Delta h_e)$, como somente estamos considerando o intervalo $-\varepsilon_i \leq \Delta h_i \leq \varepsilon_i$ (restrição (12)), definimos a_{e_i} e c_{e_i}, respectivamente, como os coeficientes angular e linear da reta ajustada aos pontos P_{1e} = $(h_{e_i}-\varepsilon_i, F_{e_i}(h_{e_i}-\varepsilon_i))$, P_{2e} = $(h_{e_i}, F_{e_i}(h_{e_i}))$ e P_{3e} = $(h_{e_i}+\varepsilon_i, F_{e_i}(h_{e_i}+\varepsilon_i))$, onde

$$F_{e_i}(h_{e_i}) = CP_i q_i^{\gamma} h_{e_i}^{-\delta} + CHP_i q_i h_{e_i},$$
$$i = m+1,\ldots,m+ne,$$

é o custo de aquisição e operação de uma bomba.

Os ajustes das curvas nos casos acima podem ser feitos através do método dos quadrados mínimos.

Algoritmo HMN para redes com bombas.

Entrada dos diâmetros D e das cargas h_e;
Ajustar os diâmetros D e cargas h_e;
$F_{atual}=F(\mathbf{D},\mathbf{h_e})$; {Equação (8)}
Parar = falso;
Enquanto *Parar* = falso,
Obter ΔD e Δh_e resolver (13) com D e h_e fixos;
$y_D = D + \Delta D$;
$y_e = h_e + \Delta h_e$;
Obter D_{novo} e $h_{e_{novo}}$ ajuste y_D e y_e;
$F_{novo} = F(D_{novo}, h_{e_{novo}})$; {Equação (8)}
Se $F_{novo} < F_{atual}$ then,
$D = D_{novo}$;
$h_e = h_{e_{novo}}$;
$F_{atual} = F_{novo}$;
Senão *Parar* = verdadeiro;
Fim

Ajustes dos diâmetros e das cargas das bombas.

Devemos determinar um vetor D que seja composto apenas por diâmetros factíveis (tabelados), garantindo também que a carga em cada nó esteja acima dos limites mínimos. Podemos também variar h_e para assegurar que as cargas nos nós estejam acima dos limites mínimos de factibilidade.

A primeira parte do ajuste é feita transformando os valores contínuos dos diâmetros em valores tabelados. Para tanto, tentamos, primeiramente, definir D_{novo} arredondando os diâmetros para os valores tabelados mais próximos. Contudo, após essa operação, algumas cargas nos nós podem estar abaixo dos seus limites mínimos, ou seja, as restrições de (9) podem não estar sendo satisfeitas.

Para contornar essa situação, podemos substituir os diâmetros de alguns canos pelos valores tabelados imediatamente maiores. A este novo vetor dos diâmetros chamaremos de D_{try}.

Porém, é necessário saber se um aumento no diâmetro é melhor, em termos de custo, que um aumento ε_i na carga da bomba i.

Para resolver este problema, reescreveremos a equação da restrição (13) como:

$$h_j(D_{novo}, h_e) + h'_j(D_{novo}, h_e)^T \begin{bmatrix} D_{try} - D_{novo} \\ h_{e_{try}} - h_e \end{bmatrix} \geq h_j^{\min} \quad (14)$$

$$j = 1, \ldots, n + 2ne$$

onde $h_{e_{try}}$ é a carga da bomba com um acréscimo ε.

Para determinar se haverá um aumento na carga das bombas ou nos diâmetros, procedemos da seguinte forma:

1) Usando a equação (14), localizamos a restrição j mais violada;
2) Determinamos
$$h'_j = \begin{cases} \dfrac{\partial h_j}{\partial D_t}(D_{novo}) & t = 1, \ldots, m,\ se\ j \leq n \\ \dfrac{\partial h_j}{\partial h_{e_r}}(h_e) & r = m+1, \ldots, m+ne,\ se\ j > n \end{cases}$$
3) Utilizando as derivadas definidas acima, determinamos o diâmetro ou carga da bomba que provoca um maior aumento em h_j por unidade monetária. Este diâmetro t ou carga da bomba r é, então, aumentado.
4) Repetimos o processo até que todas as cargas nos nós estejam acima dos limites mínimos.

Exemplo numérico.

Para exemplificar a aplicação do algoritmo acima descrito, resolvemos o problema que consiste em determinar os diâmetros e a carga da bomba da rede apresentada na Figura 2, de forma a minimizarmos o custo de construção e operação da rede.

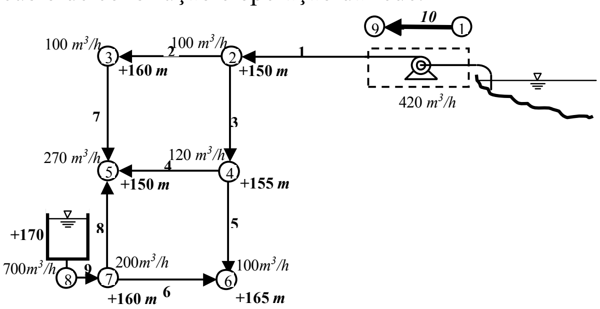

Figura 2.

A carga mínima admissível em cada nó é de 30 m acima do nível topográfico.

Os diâmetros disponíveis com seus respectivos custos encontram-se na tabela a seguir.

$	2	5	8	11	16	23	32
D	1	2	3	4	6	8	10

$	50	60	90	130	170	300	550
D	12	14	16	18	20	22	24

Para este problema, admitimos que os canos são de PVC, além de utilizarmos $C_{HW} = 148$, $CP = 2$ (custo de aquisição da bomba) e $CHP = 950$ (custo de operação da bomba).

Como diâmetros iniciais, vazões iniciais (nos canos) e cargas iniciais tomamos, respectivamente, todos iguais a 10 *in* = 0.254 *m*, 200 $m^3/h = 55{,}55.10^{-3}$ m^3/s e 200 *m*. No caso da bomba admitimos uma carga inicial de 70 *m*.

A variação máxima de carga da bomba permitida por iteração, para este problema, é dada por $\varepsilon = 5$.

Resolvendo o problema no Matlab, obtemos a seguinte solução, na qual os diâmetros estão ordenados de acordo com a numeração dos arcos na Figura 2:

$$D = [10 \quad 8 \quad 8 \quad 6 \quad 6 \quad 8 \quad 6 \quad 6 \quad 6]^T \qquad h_e = [60]$$

As saídas gráficas obtidas no Matlab são dadas abaixo:

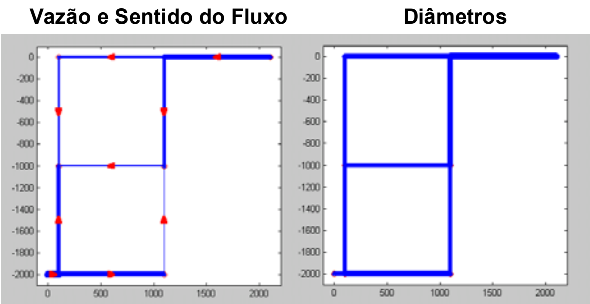

Figura 3.

Para resolver este problema foram necessários 66 segundos de trabalho computacional (em um computador com processador AMD-K6 II de 450MHz), um tempo razoável para uma rede de distribuição de água pequena.

Outros problemas clássicos da literatura, adaptados pela inclusão de bombas, também foram resolvidos. Os resultados foram comparados a dois outros programas: um algoritmo genético proposto por Savic e Walters [4], também adaptado para a otimização de redes de distribuição com bombas e o método de Kessler e Shamir [3].

De uma forma geral, o desempenho do método descrito acima pode ser considerado bastante satisfatório. As soluções por ele encontradas se aproximaram bastante das soluções fornecidas pelo algoritmo genético, a um custo computacional muito menor.

O método de Kessler e Shamir obtém diâmetros inteiros para os canos dividindo cada trecho da rede em uma seqüência de dois ou mais canos – de diâmetros diferentes – conectados. Naturalmente, esta solução apresenta um custo menor que a fornecida pelo algoritmo aqui descrito. Entretanto, essa divisão dos canos em trechos não costuma ser utilizada na prática, o que compromete a qualidade dos resultados assim obtidos.

Conclusão.

O algoritmo de Hansen Madsen e Nielsen adaptado para bombas mostrou-se eficiente, rápido e relativamente fácil de implementar. O método é uma boa alternativa para a solução de problemas nos quais a introdução de bombas é necessária para garantir uma pressão mínima nos nós consumidores, bem como para reduzir o custo de implantação da rede.

A eficiência do algoritmo pôde ser comprovada comparando-se as soluções geradas àquelas fornecidas pelos métodos específicos para otimização de redes propostos por Savic e Walters [4] e Kessler e Shamir [3]. Ainda que só tenhamos resolvido problemas com poucos arcos, sua aplicação a redes de grande porte não apresenta dificuldades.

Possíveis aprimoramentos do algoritmo envolvem o uso de uma função quadrática para aproximar o custo da rede e o emprego de uma estratégia não monótona para a aceitação dos novos diâmetros.

Referências.

[1] BHAVE, P. R. – *Analysis of flow in water distribution networks*. Lancaster, Technomic, 1991.

[2] HANSEN, C. T.; MADSEN, K.; NIELSEN, H. B. – Optimization of pipe networks. *Mathematical programming*, **52**(1), p. 45-58, 1991.

[3] KESSLER, A. & SHAMIR, U. – Decomposition technique for optimal design of water supply networks. *Engineering Optimization*, **17**(1), p. 1-19, 1991.

[4] SAVIC, D. A. & WALTERS, G. A. – Genetic algorithms for least cost design of water distribution networks. *Journal of water resources planning and management,* ASCE, **123**(2), p. 67-77, 1997.