

Métodos Numéricos para Leis de Conservação

Débora de Jesus Bezerra

Universidade Metodista de São Paulo, FACET
Rua Do Sacramento, 230
09640-000, São Bernardo do Campo, SP
E-mail: debora.bezerra@metodista.br

José Alberto Cuminato

Laboratório de Computação de Alto Desempenho, ICMC, USP
Av. do Trabalhador São-Carlense, 400 - Centro - Cx. Postal 668
13560-970, São Carlos, SP
E-mail: jacumina@icmc.usp.br

1 Introdução

Equações diferenciais parciais hiperbólicas surgem em várias áreas, tais como, dinâmica dos gases, acústica, elastodinâmica, óptica, geofísica e biomecânica, onde movimentos de ondas ou transporte advectivo são importantes. Métodos numéricos para leis de conservação são parte importante do arsenal disponível para a solução de tais equações diferenciais hiperbólicas. Estes métodos têm provado ser extremamente úteis para modelar tais fenômenos. Apresentaremos algumas propriedades matemáticas para uma classe de Equações Diferenciais Parciais hiperbólicas, as leis de conservação. Os aspectos selecionados de tais equações são essenciais para a análise das equações que governam o escoamento de fluidos e para a implementação de métodos numéricos.

A classe das leis de conservação é uma classe muito importante das equações diferenciais parciais, pois como o próprio nome indica, ela inclui aquelas equações que modelam as leis de conservação da física (massa, momentum, energia, etc). A dificuldade em trabalharmos com leis de conservação é que geralmente elas não são lineares, e esse fato afeta fortemente o procedimento numérico da solução.

Consideremos a solução numérica da equação diferencial parcial da forma

$$v_t + F(v)_x = 0 \quad (1)$$

ou na forma vetorial

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad (2)$$

onde \mathbf{v} é um vetor de K componentes da variável conservativa e \mathbf{F} é a função de fluxo de R^K em R^K .

2 Problema de Riemann

Um PVI especial chamado Problema de Riemann consiste da equação

$$v_t + av_x = 0 \quad (3)$$

junto com a condição inicial

$$v(x, 0) = v_0(x) = \begin{cases} v_L & \text{se } x < 0 \\ v_R & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad (4)$$

onde v_L e v_R são valores constantes.

A solução do problema de Riemann (3)-(4) é simplesmente

$$v(x, t) = v_0(x - at) = \begin{cases} v_L & \text{se } x - at \leq 0, \\ v_R & \text{se } x - at > 0. \end{cases} \quad (5)$$

Note que a condição inicial tem uma descontinuidade em $x = 0$ que propaga-se para o interior do domínio $x > 0$ a uma distância $d = at$ no tempo t . Esta curva característica particular $x = at$ separa as curvas características à esquerda, nas quais a solução tem valor v_L , daquelas curvas à direita, nas quais a solução assume o valor v_R .

Observe que a função (5) não pode ser uma solução de (3) em todo o plano $x - t$, por não ser diferenciável ao longo da reta $x = at$. A uma função da forma de (5) que satisfaz a equação diferencial em parte do domínio chamamos de **solução fraca** de (3). E a uma função que satisfaz (3) em todo domínio chamamos de **solução clássica**.

Consideremos o problema de valor inicial (1) com $x \in R$, $t > 0$ e condição inicial

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R. \quad (6)$$

Proposição 2.1 *Se v é uma solução clássica para o problema de valor inicial (1),(6), então v satisfaz*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [v\phi_t + F(v)\phi_x] dx dt + \int_{-\infty}^\infty v_0\phi_0 dx = 0, \quad (7)$$

para todo $\phi \in C_0^1$.

Devemos estar cientes de que podem existir soluções para a equação (7) que não são soluções clássicas para o problema de valor inicial (1),(6) (funções que satisfazem a equação (7) podem não ser diferenciáveis). Por essa razão fazemos a seguinte definição.

Definição 2.1 Se v satisfaz a equação (7) para todo $\phi \in C_0^1$, v é dito ser uma solução fraca para o problema de valor inicial (1),(6).

A curva de descontinuidade de uma solução fraca é chamada de **Choque** se as características em ambos os lados da descontinuidade influenciam na descontinuidade da curva na direção de crescimento de t . Se fizermos $a_L = F'(v_L)$ e $a_R = F'(v_R)$ onde v_L e v_R são os valores de v nos lados esquerdo e direito da descontinuidade, então uma descontinuidade será um **choque** se

$$a_L > s > a_R \quad (8)$$

onde s é a velocidade de propagação da descontinuidade que calculamos aplicando a condição de Rankine-Hugoniot (ver referência [1], página 15). Notamos que a condição de salto (condição R-H) é uma condição que as soluções fracas para um problema de valor inicial tal como (1),(6) devem satisfazer sobre um salto de descontinuidade. Esta condição não escolhe a solução fraca desejada nos problemas de valores iniciais que possuam mais de uma solução fraca.

3 Condição de Entropia

Sabemos que soluções fracas para leis de conservação podem conter descontinuidades que são propagadas da descontinuidade na condição inicial ou derivadas da interseção das características. Além disso, sabemos que soluções fracas podem não ser únicas. Nosso objetivo é calcular numericamente as soluções (incluindo as descontinuidades) para leis de conservação, mas antes devemos encontrar algum argumento que nos ajudará a decidir qual solução queremos (no caso de soluções não únicas).

Uma maneira de escolher a solução fisicamente correta é decidir pela solução viscosa. Esta solução é definida como o limite quando $\epsilon \rightarrow 0$ das funções $v^\epsilon(x, t)$ onde $v^\epsilon(x, t)$ é solução da equação parabólica $v_t^\epsilon + F(v^\epsilon)_x = \epsilon v_{xx}^\epsilon$, com condição inicial $v^\epsilon(x, 0) = v_0^\epsilon(x)$. Existem várias razões para escolher a solução viscosa como a correta. Uma delas é que as equações que estamos resolvendo modelam situações físicas que incluem algum tipo de dissipação. Uma das características mais importante da solução viscosa é o seguinte resultado.

Proposição 3.1 Se uma solução viscosa existe, ela é uma solução fraca.

Prova ver referência [1], página 22.

Definição 3.1 Condição de Entropia I: A solução para a equação (7), $v = v(x, t)$, contendo uma descontinuidade propagando com velocidade s é dita satisfazer a Condição de Entropia I se

$$F'(v_L) > s > F'(v_R) \quad (9)$$

onde v_L e v_R são os valores da solução a esquerda e a direita da descontinuidade, respectivamente.

Lembremos que a principal dificuldade das leis de conservação não é a existência de soluções, mas mais propriamente a unicidade delas, incluímos o seguinte resultado, o qual ilustra como a Condição de Entropia I implica em unicidade.

Proposição 3.2 Suponha que F é convexa e que a solução v para o problema de valor inicial

$$v_t + F(v)_x = 0, \quad x \in R, \quad t > 0 \quad (10)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in R \quad (11)$$

satisfaz a Condição de Entropia I sobre todos os saltos. Então a solução v é a única solução para o problema de valor inicial (10)-(11) que satisfaz a Condição de Entropia I e é uma solução viscosa para o problema de valor inicial (10)-(11).

4 Esquemas Numéricos para Leis de Conservação

Para resolver numericamente uma lei de conservação utilizaremos vários esquemas de diferenças explícitos que são derivados da discretização por diferenças finitas da Equação Diferencial Parcial Hiperbólica escalar linear:

$$v_t + av_x = 0 \quad (12)$$

onde a é constante e será tomado sempre positivo.

A discretização mencionada acima, será realizada sobre uma região do plano $x - t$ em um conjunto de pontos separados entre si por uma distância Δx na direção x e Δt na direção t . A esse conjunto de pontos damos o nome de **malha**, onde todo ponto pode ser representado pelo par ordenado $(x_i, t_n) = (x_0 + i\Delta x, t_0 + n\Delta t)$ e (x_0, t_0) representa a origem do sistema de coordenadas.

Vejamos alguns esquemas numéricos:

- **Esquema Lax-Wendroff:** é um esquema estável para $|R| \leq 1$, consistente de ordem 2.

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(R^2 + R)u_{i-1}^n + (1 - R^2)u_i^n + \frac{1}{2}(R^2 - R)u_{i+1}^n \quad (13)$$

- **Esquema MacComarck:** é um esquema de dois passos estável para $|R| \leq 1$, consistente de ordem 2.

$$\begin{aligned} u_i^* &= u_i^{n-1} - R(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (14) \\ u_i^{n+1} &= \frac{1}{2} [u_i^n + u_i^* - R(u_i^* - u_{i-1}^*)] \quad (15) \end{aligned}$$

Soluções numéricas de problemas cuja solução contem descontinuidades, tais como choques, requerem exigências estritas na formulação matemática das equações governantes e nos esquemas numéricos que resolvem essas equações. Como podemos escolher os tipos de variáveis que queremos usar nas formulações das equações, uma boa opção é escolher variáveis conservativas, pois quando as variáveis não conservativas são utilizadas o esquema numérico pode não satisfazer as condições de salto e não capturar corretamente o choque.

Esquemas não conservativos não convergem para a solução correta quando essa solução apresenta um choque. Um resultado importante de Lax e Wendroff [3], estabelece que métodos numéricos conservativos, se convergentes, convergem para a solução fraca da lei de conservação.

Assim, é recomendável trabalhar com métodos conservativos que capturem os choques nas soluções.

Definição 4.1 *Um esquema conservativo para a lei de conservação (1) é um método numérico da forma*

$$u_i^{n+1} = u_i^n + R [h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n], \quad (16)$$

onde $R = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ e

$$h_{i+1/2}^n = h(u_{i-p}^n, \dots, u_{i+q}^n) \quad (17)$$

$$h_{i-1/2}^n = h(u_{i-p-1}^n, \dots, u_{i+q-1}^n) \quad (18)$$

com p e q inteiros não negativos ou

$$h_{i+1/2}^n = h(u_i^n, u_{i+1}^n) \quad (19)$$

$$h_{i-1/2}^n = h(u_{i-1}^n, u_i^n) \quad (20)$$

se $p = 0$ e $q = 1$; $h_{i+1/2}^n$ é chamada função de fluxo numérico e é uma aproximação para a função de fluxo F em (1).

A definição acima implica que em um esquema conservativo a soma das soluções numéricas no tempo n é igual à soma das soluções numéricas no tempo $n + 1$, isto é, $\sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i^{n+1} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i^n$.

4.1 Esquemas de Godunov

O método de Godunov é um método conservativo da forma (16), onde as funções de fluxo numérico $h_{i+1/2}^n$ são obtidas da solução de problemas de Riemann locais.

Para descrevermos o método de Godunov precisamos redefinir a discretização do domínio, onde

dividiremos o eixo na direção x em intervalos de comprimento Δx com centro nos pontos médios de cada subintervalo, por exemplo, o intervalo $I_{i+1/2} = [x_i, x_{i+1}]$ terá centro no ponto $x_{i+1/2}$.

Representaremos por \tilde{u}^n a solução aproximada, constante por partes, para a lei de conservação

$$v_t + F(v)_x = 0, \quad x \in R, \quad t > 0 \quad (21)$$

com condição inicial $v(x, 0) = f(x)$, $x \in R$ no tempo $t = n\Delta t$. A função \tilde{u}^n será constante no intervalo $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ e denotaremos o valor de \tilde{u}^n em $x = i\Delta x$ por u_i^n .

Denotaremos a solução para a lei de conservação (21) com condição inicial $v(x, t_n) = \tilde{u}^n(x)$, $x \in R$, por $\bar{U} = \bar{U}(x, t)$. Queremos usar $\bar{U}(x, t)$ em $t = t_{n+1}$ para definir uma nova aproximação constante por partes no tempo $t = t_{n+1}$, \tilde{u}^{n+1} , como

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \bar{U}(x, t_{n+1}) dx. \quad (22)$$

Assim, a solução constante por partes no tempo t_{n+1} será a média da solução do problema de Riemann que tem como condição inicial a aproximação no tempo t_n .

Quando aproximamos a condição inicial por funções constantes em cada intervalo essa condição passa a apresentar descontinuidades. Sabemos que essas descontinuidades irão se tornar choques ($u_L > u_R$) ou leques ($u_L < u_R$). Para Δt suficientemente pequeno a solução, localmente, conterà uma série de choques e leques conectados por funções constantes. Alguns dos choques e leques se movimentarão e outros ficarão estacionários. Os que estarão se movendo, geralmente, moverão com velocidades e direções diferentes dependendo da função de fluxo F .

Continuamos o processo para obter u_i^{n+1} resolvendo os problemas de Riemann associados com cada uma das extremidades dos intervalos, $x_{i-1/2}$, $i = -\infty, \dots, \infty$.

$$v_t + F(v)_x = 0, \quad x \in R, \quad t > t_n \quad (23)$$

$$v(x, t_n) = \begin{cases} u_{i-1}^n, & \text{se } x < x_{i-1/2} \\ u_i^n, & \text{se } x \geq x_{i-1/2} \end{cases} \quad (24)$$

Integrando a lei de conservação (23) em relação a x e t de $x_{i-1/2}$ a $x_{i+1/2}$ e de t_n a t_{n+1} , respectivamente e integrando primeiro em relação a t e depois em relação a x , obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} [\bar{U}(x, t_{n+1}) - \bar{U}(x, t_n)] dx + \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} [F(\bar{U}(x_{i+1/2}, t)) - F(\bar{U}(x_{i-1/2}, t))] dt \\ & = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

onde substituímos v em (23) por \bar{U} , pois estamos usando $\bar{U} = \bar{U}(x, t)$ para denotar a solução para

o problema de valor inicial (21) com condição inicial $\bar{U}(x, t_n) = \bar{u}^n(x)$, isto é, a solução local para o problema de Riemann (23)-(24). Multiplicando (25) por $\frac{1}{\Delta x}$ e usando (22), podemos escrever essa equação como

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{\Delta x} \int_{t_n}^{t_{n+1}} [F(\bar{U}(x_{i+1/2}, t)) - F(\bar{U}(x_{i-1/2}, t))] dt. \quad (26)$$

Como sabemos que a solução em $x = x_{i+1/2}$ dependerá de u_i^n e u_{i+1}^n (da mesma forma que a solução em $x = x_{i-1/2}$ dependerá de u_{i-1}^n e u_i^n), definimos a função de fluxo numérico como

$$h_{i\pm 1/2}^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} F(\bar{U}(x_{i\pm 1/2}, t)) dt \quad (27)$$

substituindo a definição acima em (26) obtemos o esquema conservativo de Godunov

$$u_i^{n+1} = u_i^n - R[h_{i+1/2}^n - h_{i-1/2}^n] \quad (28)$$

onde $R = \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

A solução \bar{U} é uma solução de similaridade para o problema de Riemann (23)-(24), isto é, \bar{U} pode ser escrita como $\bar{U}(x, t) = \psi\left(\frac{x - x_{i-1/2}}{t - t_n}\right)$. Assim, em $x = x_{i-1/2}$, $\bar{U}(x_{i-1/2}, t) = \psi(0)$ é constante para $t \in [t_n, t_{n+1}]$. Usando este fato, a integral na definição de $h_{i-1/2}^n$ em (27) pode ser simplificada e obtemos

$$h_{i-1/2}^n = F(\bar{U}(x_{i-1/2}, t)). \quad (29)$$

Uma expressão análoga pode ser obtida para $h_{i+1/2}^n$.

A dificuldade mais relevante da aplicação do método de Godunov é o fato que este exige a solução exata de uma seqüência de problemas de Riemann a cada passo de tempo, o que na prática tem um alto custo computacional. E além disso, pode acontecer da solução do Problema de Riemann não existir. Uma característica importante do método de Godunov é que ele produz uma solução que satisfaz a condição de entropia (ref. [6]).

4.2 Aplicações de Métodos Numéricos para Leis de Conservação Escalares

A seguir consideramos alguns exemplos onde encontramos a solução numérica de uma lei de conservação escalar e em alguns casos comparamos essa solução com a solução analítica.

1. Vamos utilizar o esquema de MacCormack para aproximar a solução da equação de Burgers

$$v_t + \left(\frac{1}{2}v^2\right)_x = 0, \quad x \in (-1, 1), t > 0 \quad (30)$$

com condição inicial

$$v_0(x) = v(x, 0) = \begin{cases} -1.0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1.0 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (31)$$

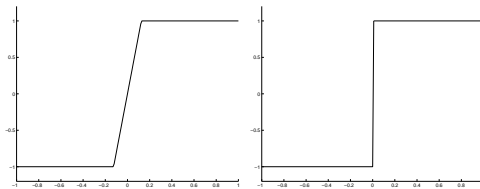


Figura 1: Soluções exata e aproximada para equação de Burgers com condição inicial (31) no tempo $t = 0.125$. Solução calculada usando o esquema MacCormack, $\Delta x = 0.01$ e $\Delta t = 0.001$.

e condições de contorno numéricas $u_0^n = -1.0$ e $u_M^n = 1.0$.

Vemos na Figura 1 que a solução dada pelo esquema MacCormack é igual à condição inicial. Isto não é tão mal, pois a velocidade de propagação da descontinuidade s é igual a 0. Além disso, vemos que essa solução, é uma solução fraca para o problema acima. Mas, essa solução não satisfaz a Condição de Entropia I $F'(v_L) > s > F'(v_R)$, isto é, ela não é uma solução viscosa. Disso, a solução viscosa para o problema (30), (31) com condições de contorno numéricas $u_0^n = -1.0$ e $u_M^n = 1.0$ conterá um leque e não será a solução dada na Figura 1. Assim, temos um método que converge para uma solução fraca que não é a entrópica.

2. Utilizando o esquema de Lax-Wendroff para aproximar a solução da equação de Burgers (30) com condição inicial

$$v_0(x) = v(x, 0) = \begin{cases} 1.0 & \text{se } x \leq 0 \\ 0.5 & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (32)$$

na região $[-1, 1]$ e com condição de contorno $v(-1, t) = 1.0$ e condição de contorno numérica $u_M^n = 0.5$, obtemos a solução apresentada na Figura 2.

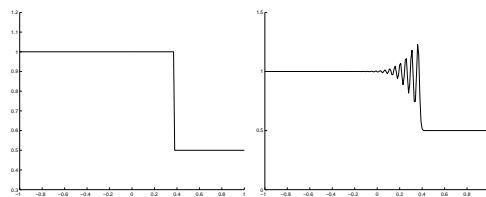


Figura 2: Soluções exata e aproximada da equação de Burgers com condição inicial (32) em $t = 0.5$. Solução calculada usando o esquema Lax-Wendroff, $\Delta x = 0.01$ e $\Delta t = 0.001$.

Para o tempo $t = 0.5$ sabemos que a descontinuidade deveria estar localizada em $x = 0.375$ mas, pela Figura 2 percebemos que não conseguimos decidir exatamente onde ocorre o salto, devido às oscilações. Esse tipo de comportamento ocorre quando tentamos usar o esquema de Lax-Wendroff linear para calcular

soluções descontínuas. Lembramos que para esquemas lineares essas oscilações ocorrem devido ao fato que o termo principal do erro é um termo dispersivo. A dissipação desse método é de ordem 4 e não é suficiente para amortecer as oscilações de alta frequência. Assim, vemos que o esquema Lax-Wendroff fornece-nos a velocidade correta de propagação da descontinuidade mas, não pode resolver adequadamente a descontinuidade. Se fôssemos calcular soluções para um tempo grande, a solução seria pior.

Os problemas apresentados acima em cada exemplo ocorrem devido ao fato que apesar dos métodos numéricos serem consistentes, estáveis e convergentes, eles não são conservativos, TVD, monótonos, nem de alta ordem de precisão.

Resolvendo os exemplos acima pelo método de Godunov obtemos os resultados mostrados nas Figuras 3 e 4.

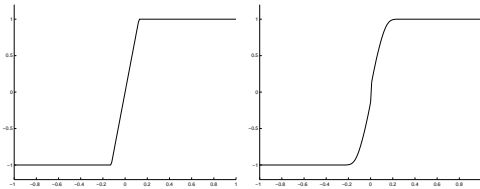


Figura 3: Soluções exata e aproximada para a equação de Burgers com condição inicial (31) em $t = 0.5$. Solução calculada usando o método de Godunov, $\Delta x = 0.01$ e $\Delta t = 0.005$.

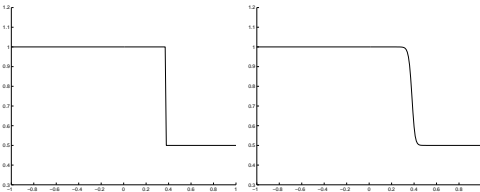


Figura 4: Soluções exata e aproximada para a equação de Burgers com condição inicial (32) em $t = 0.5$. Solução calculada usando o método de Godunov, $\Delta x = 0.01$ e $\Delta t = 0.005$.

Observando as Figuras 3 e 4 podemos concluir que o esquema de Godunov parece sempre calcular a solução viscosa desejada.

5 Sistemas de Leis de Conservação

Embora exista muitas similaridades entre os resultados para leis de conservação escalares e vetoriais, existem também algumas diferenças técnicas que algumas vezes são difíceis de descrever. Nesta seção enfatizaremos tais diferenças entre os resultados para leis de conservação vetoriais e escalares.

Para trabalharmos com sistemas de leis de conservação devemos verificar quais resultados, conceitos e definições, válidas para leis de conservação

escalares, podem e quais não podem ser utilizados para sistemas de leis de conservação. Um sistema de leis de conservação tem K famílias de características. Definimos as curvas características de um sistema de lei de conservação como as soluções do problema de valor inicial

$$x'(t) = \lambda_n(\mathbf{v}(x(t), t)) \quad (33)$$

$$x(0) = x_0 \quad (34)$$

para algum x_0 e $n = 1, \dots, K$. Obviamente que como λ_n depende de \mathbf{v} , as curvas características também dependerão de \mathbf{v} e assim não podemos resolver facilmente o problema de valor inicial (33)-(34).

A diferença mais importante entre o caso escalar e o vetorial é que nesse caso não podemos concluir que a solução é constante sobre uma curva característica.

Como no caso de leis de conservação escalares, a solução fraca para um sistema de lei de conservação não é única. Novamente precisaremos do conceito de uma solução viscosa ou algum tipo de condição de entropia para ajudar-nos a escolher a melhor solução \mathbf{v} . Como no caso escalar, buscamos condições que impostas sobre as soluções garantirão que elas são soluções viscosas.

Um exemplo de um sistema de leis de conservação é o sistema de equações de Euler que, entre outros fenômenos, descreve o escoamento de um gás em um tubo de choque. Tal sistema pode ser escrito em função das variáveis primitivas ou variáveis físicas densidade ρ , pressão p e velocidade v ou em função das variáveis conservadas: densidade ρ , momentum ρv e energia total por unidade de massa E . Fisicamente, estas quantidades conservadas resultam naturalmente da aplicação das leis fundamentais de conservação de massa, segunda Lei de Newton e da Lei de conservação de energia. A seguir apresentamos uma breve descrição do problema: Considere um tubo cheio com gás e uma membrana que separa o tubo em duas seções. Suponha que o tubo é infinitamente longo, a membrana está situada em $x = 0$, para $x < 0$ a densidade e a pressão são iguais a 2, para $x > 0$ a densidade e a pressão são iguais a 1 e a velocidade é zero em todo domínio. No tempo $t = 0$, a membrana é removida. O problema é determinar o escoamento resultante no tubo. Assumimos que o gás é invíscido, o escoamento unidimensional e escrevemos as leis de conservação para o fluido (massa, momentum e energia) como

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0 \quad (35)$$

$$(\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x = 0 \quad (36)$$

$$E_t + [v(E + p)]_x = 0 \quad (37)$$

Certamente, tanto para o problema físico como para o problema numérico são necessários um domínio finito e condições de contorno. Visto que o sistema é composto de três equações teremos uma

combinação de três descontinuidades, associadas a cada uma das curvas características.

Vamos resolver numericamente o problema do tubo de choque, ou seja, o problema de valor inicial formado pelo sistema de leis de conservação (35) no intervalo $(-2, 2)$ com condições iniciais

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

$$p(x, 0) = \begin{cases} 2 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

e $v(x, 0) = 0, x \in [-2, 2]$. Condições de contorno de Neumann e condições de contorno numéricas

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \rho_1, m_0 = m_1, E_0 = E_1, \text{ para } x = -2; \\ \rho_M &= \rho_{M-1}, m_M = m_{M-1} \text{ e} \\ E_M &= E_{M-1}, \text{ para } x = 2. \end{aligned}$$

Da referência [6] sabemos que próximo de $x = 1.25$ todas as 3 variáveis têm descontinuidades de saltos que são choques. Como trata-se de um 3-sistema, temos uma combinação de três leques e descontinuidades, ou seja, temos um leque ou descontinuidade associada com cada uma das curvas características.

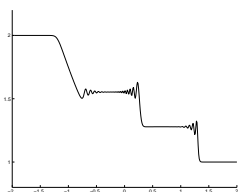


Figura 5: Gráfico da densidade do problema do tubo de choque para o tempo $t = 1.0$. A solução foi encontrada pelo esquema de Lax-Wendroff com $\Delta x = 0.01$ e $\Delta t = 0.0025$.

Analisando a Figura 5 vemos que o método de Lax-Wendroff gera oscilações nos resultados como ocorreu com o caso escalar.

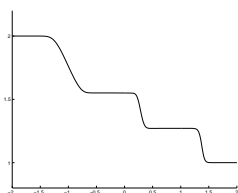


Figura 6: Gráfico da densidade do problema do tubo de choque para o tempo $t = 1.0$. A solução foi encontrada pelo esquema de diferenças associado com \hat{A} definida pelo método de linearização de Roe, $\Delta x = 0.01$ e $\Delta t = 0.0025$.

Comparando os resultados obtidos com o esquema de Lax-Wendroff e aqueles obtidos pelos soluções aproximadas de Riemann, vemos que estas fornecem soluções muito melhores do que as obtidas pelo esquema de Lax-Wendroff, capturando as singularidades sem gerar oscilações na solução. Além disso, comparamos os resultados que obtivemos com

os resultados obtidos por Toro, ref.[7], pag. 370-372 e verificamos que nossos resultados são compatíveis com os da referência.

6 Conclusão

Neste trabalho estudamos várias técnicas necessárias para leis de conservação escalares com o intuito de entender as técnicas de solução para sistemas de leis de conservação.

O objetivo deste trabalho foi o de estudar métodos numéricos robustos para a aproximação da solução de leis de conservação hiperbólicas escalares unidimensionais e bidimensionais e de sistemas de leis de conservação hiperbólicas.

Do trabalho realizado podemos concluir que dentre todos os métodos estudados, o único que sempre fornece-nos a solução fraca desejada, ou seja, a solução viscosa é o método de Godunov. O método de Lax-Wendroff não captura a singularidade corretamente, quando a solução apresenta rarefação, gerando oscilações na solução.

Para sistemas de leis de conservação, o método de Lax-Wendroff apresenta os mesmos problemas de oscilações que são conhecidas para o caso escalar. Métodos conservativos como o de Godunov com linearização de Roe apresentam melhores resultados.

Referências

- [1] BEZERRA, D.J.. *Métodos Numéricos para Leis de Conservação*, Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, São Carlos, 2003.
- [2] CUMINATO, J.A.; MENEGUETTE JUNIOR, M.. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas*, ICMC-USP São Carlos SP.
- [3] LAX, P.D. and WENDROFF, B.. *Systems of Conservation Laws*, Comm. Pure Appl. Math., 13:217-237, 1960.
- [4] LEVEQUE, R.J., *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.
- [5] THOMAS, J.W.. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Texts in Applied Mathematics 22, Springer-Verlag, NY, 1995.
- [6] THOMAS, J.W.. *Numerical Partial Differential Equations: Conservation Laws and Elliptic Equations*, Texts in Applied Mathematics 33, Springer-Verlag, NY, 1999.
- [7] TORO, E.F.. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics-Uma Introdução Prática*, 2º ed., Springer, Berlin, 1999.